

演奏者の重複所属と出演順序の公平性を考慮した タイムテーブル数え上げ問題

— 定式化、厳密計数法および所属構造に関する基礎的考察 —

佐藤大智 / Daichi Satoh

from 算数・数学のアトリエ

2026 年 10 月 24 日（第 1 版・未査読の研究ノート）

概要

本稿では、複数の演奏団体に重複して所属する出演者が存在する状況において、演奏順序および休憩配置の条件を満たすタイムテーブルの総数を求める問題を定式化する。各団体への所属を二値行列で表現し、固定された最初・最後の演奏団体、3～5 団体ごとの休憩、休憩を挟まない同一人物の連続出演禁止を同時に扱う。さらに、人物ごとの出演位置の累積偏差を公平性の指標として定め、まず休憩回数を最小化し、次に最大偏差を最小化した配置の数を求める厳密な漸化式を与える。制約グラフ、演奏ブロックの分解、包除原理、所属パターンの圧縮、および制約解除の相互作用について基礎的な命題を示す。最後に、完全な合成データによる再現可能な検算例を示す。本稿の主要な構成要素は既存の組合せ論・グラフ理論に基づいており、数学的な新規性の確立は今後の検討課題である。

キーワード： タイムテーブル、厳密数え上げ、重複所属、組合せ論、グラフ理論、動的計画法、公平性、休憩配置

目次

1	はじめに	5
1.1	問題意識	5
1.2	本稿で扱う問い	5
1.3	先行研究と本稿の位置づけ	5
1.4	問題設定の発展経緯	6
1.5	本稿の構成	6
2	集合と所属行列による基本モデル	7

2.1	団体人数の可変性について	8
3	タイムテーブルと休憩の定義	8
3.1	休憩回数の取り得る範囲	9
3.2	個人の出演数から得られる必要条件	10
4	一般的な数え上げ式	11
4.1	最小休憩回数	12
5	人物の出演位置に対する公平性	12
5.1	公平性を一つの量で表す	12
5.2	整数化した偏差と状態の圧縮	13
5.3	公平性の簡単な下界	13
5.4	辞書式最適化	14
6	集合状態を用いた厳密計算法	14
6.1	偏差のしきい値を固定して数える	14
6.2	固定した休憩位置に対する状態遷移	15
6.3	全長さパターンを同時に扱う状態	15
6.4	計算量について	16
7	演奏ブロックによる分解	16
7.1	ブロック内の数え上げ	16
7.2	内部ブロックの対称性	17
7.3	順序なし集合分割への圧縮	18
7.4	公平性を含むブロック単位の漸化式	18
8	包除原理と禁止辺の構造	19
8.1	禁止辺ごとの事象	19
8.2	線形森の成分から強制隣接数を求める	19
8.3	非零項の削減と計算上の限界	20
9	所属パターンの圧縮	20

9.1	同じ所属パターンを持つ人物	20
9.2	所属集合の包含と冗長性	20
9.3	禁止ペアを保持する最小制約表現	21
10	制約解除の影響と相互作用	21
10.1	一人の制約の影響	21
10.2	複数人物の制約解除	22
10.3	人物違反母関数	23
11	特殊な所属構造の計数公式	23
11.1	一人物のみが掛け持ちする場合	23
11.2	複数の掛け持ち人物がいる場合	24
12	小規模計算による検算	25
12.1	計算方法の検証方針	25
12.2	8 団体の包除原理検算	25
12.3	8 団体の公平性計算検算（端点を明記した合成例）	25
12.4	団体人数が異なる合成例	26
12.5	実務データを公開しない理由	27
13	制約構造と数え上げ数の関係	27
13.1	なぜ掛け持ち数だけでは決まらないか	27
13.2	制約の影響度	27
13.3	計算を減らすための方向性	28
13.4	個人別感度分析の位置づけ	28
14	研究上の限界と今後の課題	28
14.1	現時点で完成している部分	28
14.2	まだ完成していない部分	29
14.3	未解決問題	29
14.4	公開用データとプライバシー	29
14.5	研究成果の提示方法	30

15	結論	30
付録 A	記号一覧	30
付録 B	強制隣接の成分公式（補足）	31
付録 C	厳密計数の手順	32
付録 D	研究ノートとしての公開範囲	32

1 はじめに

1.1 問題意識

演奏団体が複数出演する催しでは、一人の出演者が複数の団体に所属することがある。このとき、出演順を単純に抽選したり、団体が無作為に並べたりすると、同じ人物が休憩なしで連続して出演する場合が生じる。特に、全体の団体数が数十組に及び、一部の人物が5組以上の団体を掛け持ちする状況では、出演順の調整が容易ではない。

一方、現実の編成作業では、連続出演の有無だけが問題になるわけではない。演奏開始から終了までの長い時間帯のうち、ある人物の出演が冒頭に集中することも望ましくない。また、催しの最初と最後に出演する団体が事前に決まっている場合や、一定間隔で休憩を設ける場合も多い。このような複数の条件を同時に満たす順序を一つ見つけるだけでなく、**成立する順序が何通り存在するのか**を知ることが、本研究の出発点である。

1.2 本稿で扱う問い

次の情報がすべて与えられたと仮定する。

1. 演奏団体の数と、各団体を構成する人物の集合。
2. 最初に出演する団体と、最後に出演する団体。
3. 休憩によって区切られる演奏ブロックの最小・最大団体数。
4. 休憩を挟まない同一人物の連続出演を禁止するという規則。
5. 出演位置の偏りを評価する公平性指標。

求めるのは、**必要な休憩回数が最小であり、その中で公平性が最適となるタイムテーブルの総数**である。実務では4～7人編成の団体を主な対象とするが、理論の主要部分はより一般の有限集合系に対して述べる。

1.3 先行研究と本稿の位置づけ

時間割の自動作成は組合せ最適化、制約充足、探索アルゴリズムに関係する。Schaerf の概説 [5]、Ceschia らの教育的時間割に関するサーベイ [6] を参照する。これらは本稿と対象・制約が完全には一致しないが、時間割問題の多様性と検証データの重要性を示している。

演奏者が複数の演目に登場する問題により近いのは、映画製作における talent scheduling problem である。Cheng, Diamond, Lin[1] は撮影シーンの順序に伴う出演者の拘束費用を扱い、

Garcia de la Banda, Stuckey, Chu[2] はその動的計画法による解法を論じた。音楽リハーサルについては、Sakulsom, Tharmmaphornphilas[3] が演奏曲目の担当者・長さ・待機時間を考慮したスケジューリングを研究している。関連して Adelson, Norman, Laporte[4] による動的計画法の古典的研究もある。

本稿の関心は、待機費用を最小にする一つの出演順を探すことではなく、**固定端点・休憩間隔・連続出演禁止のもとで、休憩数と最大出演偏差を辞書式に最小化したタイムテーブルを厳密に何通り数えられるか**という点にある。ただし、これは既存の最適化問題と全く異なることを意味しない。計数問題としての新規性や最も近い先行研究の網羅性は未確定である。

また、許容される隣接関係からなるグラフのハミルトン路の計数は古典的である。Bax[7, 8] の包除法などを踏まえ、本稿の包除公式やブロック分解は、それら既知の枠組みの本問題への特殊化として位置づける。本稿の定理を「世界初の定理」と断定せず、検証可能な研究ノートの形に整理する。

1.4 問題設定の発展経緯

本研究の問題設定は、具体的な演奏会の編成上の困難から段階的に整理された。最初は複数日にわたる催しにおいて、特定人物の出演が1日目に偏らないことを考えた。しかし、数学的な構造を明確にするため、まず1日開催の問題へ対象を限定した。次に、団体数が30程度の場合の休憩間隔を検討し、演奏時間を独立の変数として扱う代わりに、連続する演奏団体数が3~5となるブロック構造を採用した。

さらに、各団体は必ず6人ではなく4~7人の範囲で構成されること、人物の所属団体数は一律ではなく1~7団体程度まで変動しうること、催しの最初と最後の出演団体は固定したいこと、休憩を挟めば同一人物が前後の団体へ連続出演してもよいことを順次明確にした。これらは互いに異なる条件であり、混同すると数え上げる対象そのものが変わる。

最終的に、本稿では「休憩数を最小にする」「その条件のもとで最も出演が偏る人物の偏りを小さくする」という優先順位を定めた。複数日への拡張、出演時間の長短、機材の転換時間、希望出演順、個々人の休養時間は本稿の標準問題には含めず、今後の拡張として扱う。

1.5 本稿の構成

第2節で所属行列、第3節で休憩条件、第4節で一般計数式、第5節で公平性を定める。第6節と第7節で動的計画法とブロック分解、第8節で包除原理、第9節で所属パターンの圧縮、第10節で制約解除の相互作用を述べる。第11節で特殊構造の公式、第12節で公開可能な合成例による検証、第13節で構造と計数の関係を議論する。最後に第14節で限界と今後の課題を整理する。

2 集合と所属行列による基本モデル

定義 2.1 (人物集合と団体集合). 人物の集合を $P = \{1, \dots, m\}$ 、演奏団体の集合を $V = \{1, \dots, n\}$ とする。人物 $p \in P$ が団体 $i \in V$ に所属することを表す所属行列を

$$X = (x_{pi}) \in \{0, 1\}^{m \times n}, \quad x_{pi} = \begin{cases} 1 & (p \text{ が } i \text{ に所属}), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める。

定義 2.2 (団体人数と所属数). 団体 i の人数と人物 p の所属団体数を、それぞれ

$$\ell_i = \sum_{p=1}^m x_{pi}, \quad d_p = \sum_{i=1}^n x_{pi}$$

で表す。実務的な対象では $4 \leq \ell_i \leq 7$ を仮定することが多いが、すべての団体が 6 人である必要はない。また d_p は人物ごとに異なってよい。

命題 2.3 (延べ出演人数の二重計数).

$$\sum_{i=1}^n \ell_i = \sum_{p=1}^m d_p.$$

証明. 両辺はいずれも $\sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^m x_{pi}$ に等しい。 □

この恒等式によって、団体人数の分布と人物の掛け持ち数の分布を相互に検算できる。例えば 30 団体すべてが 6 人編成なら、延べ出演人数は 180 である。ただし実人数が 180 人とは限らない。

定義 2.4 (所属集合). 人物 p の所属団体集合と、団体 i の人物集合を

$$A_p = \{i \in V : x_{pi} = 1\}, \quad B_i = \{p \in P : x_{pi} = 1\}$$

とする。したがって $d_p = |A_p|$ 、 $\ell_i = |B_i|$ である。

定義 2.5 (重複数と連続可能性). 異なる団体 i, j の共通人物数を

$$w_{ij} = \sum_{p=1}^m x_{pi} x_{pj} = |B_i \cap B_j|$$

と定める。また連続可能性を

$$c_{ij} = \mathbf{1}(w_{ij} = 0) \quad (i \neq j)$$

とする。すなわち、共通人物がいなければ $c_{ij} = 1$ 、いれば $c_{ij} = 0$ とする。

定義 2.6 (重複グラフと連続可能グラフ). 頂点集合を V とし、重複グラフ $G_X = (V, E_X)$ を

$$E_X = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n, w_{ij} > 0\}$$

で定義する。一方、 $i \neq j$ かつ $c_{ij} = 1$ のとき辺を張るグラフを連続可能グラフ H_X とする。 H_X は G_X の補グラフである。

注意 2.7. 重複グラフ G_X が分かれば、連続出演の禁止条件を判定できる。しかし、公平性を計算するためには、一般に人物ごとの所属集合 A_p も必要になる。したがって、両者は理論上の役割が異なる。

例 2.8 (掛け持ち数のみでは不十分). 人物 2 名がそれぞれ 3 団体に所属していても、その人物たちが同じ 3 団体に重複所属する場合と、互いに異なる 3 団体に所属する場合では、連続を禁止するペアの構造が異なる。したがって、 n, m と掛け持ち数の分布だけから、一般のタイムテーブル数を一意に決めることはできない。

2.1 団体人数の可変性について

団体人数 l_i が 4~7 の範囲で変動していても、所属行列 X を使えば形式を変更する必要はない。実際の連続可能性には l_i の値そのものよりも、共通人物の存在が直接的に関係する。

命題 2.9 (専属人物を増やしても連続可能性は変化しない). ある団体に、その団体のみに所属する新しい人物を追加した場合、重複グラフ G_X は変化しない。また、公平性の評価対象を 2 団体以上に所属する人物に限れば、本稿で定める公平性関数も変化しない。

証明. 新しい人物が所属する団体は一つだけなので、異なる団体の共通人物を増加させない。さらに、この人物は公平性の評価対象に含まれない。よって両主張が従う。□

注意 2.10. 追加後にも団体人数の上限を満たしていることが前提である。公平性を全人物に対して定義する場合には、後半の主張は別途検討が必要である。

3 タイムテーブルと休憩の定義

定義 3.1 (出演順序). 全団体の出演順序を V の置換

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in \mathfrak{S}_n$$

で表す。トップバッター a とトリ z が固定される場合、 $a \neq z$ とし、 $\pi_1 = a, \pi_n = z$ を要求する。

定義 3.2 (休憩位置). 休憩位置の集合を $D \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ とする。 $j \in D$ は、 j 番目と $j+1$

番目の団体の間に休憩を入れることを意味する。休憩回数は $k = |D|$ とする。休憩を入れた前後では、同一人物が連続する 2 団体に出演してもよい。

定義 3.3 (演奏ブロック). 休憩により分割された、休憩を含まない連続した出演団体の列を演奏ブロックと呼ぶ。休憩回数が k なら、ブロック数は $b = k+1$ である。ブロック長を $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_b)$ と書く。

本稿の標準条件は

$$3 \leq \lambda_j \leq 5 \quad (1 \leq j \leq b), \quad \sum_{j=1}^b \lambda_j = n.$$

である。演奏時間そのものは変数に含めない。5～10 分程度の演奏枠を想定することは動機になるが、本稿の数学モデルに時間長の制約は存在しない。

定義 3.4 (休憩なしの連続出演禁止). タイムテーブル (π, D) が連続出演禁止を満たすとは、

$$\prod_{\substack{1 \leq j < n \\ j \notin D}} c_{\pi_j, \pi_{j+1}} = 1$$

が成立することをいう。 $j \in D$ の境界については、 $c_{\pi_j, \pi_{j+1}}$ に条件を課さない。

3.1 休憩回数の取り得る範囲

命題 3.5 (ブロック長条件による休憩数の範囲). すべてのブロック長が 3 以上 5 以下であるとき、休憩回数 k は

$$\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1$$

を満たす。逆に、この不等式を満たす整数 k に対しては、ブロック長の列を少なくとも一つ構成できる。

証明. $b = k + 1$ 個のブロックについて $3b \leq n \leq 5b$ が必要である。逆に $3b \leq n \leq 5b$ のとき、すべてのブロックの長さをまず 3 とし、残り $n - 3b \leq 2b$ を各ブロックに高々 2 ずつ配分すればよい。□

例 3.6 (30 団体). 30 団体では、休憩回数は 5 回から 9 回までがブロック長条件と両立する。5 回休憩の場合は、すべてのブロックが 5 団体となる。しかし、掛け持ちによる禁止条件のため、5 回で実行可能とは限らない。

例 3.7 (31 団体). 31 団体を休憩 6 回で区切る場合、7 個のブロックの長さがそれぞれ 3 以上 5 以下であればよい。長さの多重集合は

$$(4^4, 5^3), \quad (3, 4^2, 5^4), \quad (3^2, 5^5)$$

の 3 種類であり、ここで指数は同じ長さの個数を示す。したがって休憩位置の通り数は

$$\binom{7}{3} + \frac{7!}{1!2!4!} + \binom{7}{2} = 35 + 105 + 21 = \boxed{161}$$

である。ただし、追加条件「各ブロック長の差が 1 以下」を課す場合に限り、 $(4^4, 5^3)$ の順列 35 通りだけが残る。

命題 3.8 (休憩位置の母関数). 休憩回数が k 回で、各ブロック長が 3 以上 5 以下となる休憩配置の個数は

$$R(n, k) = [x^n](x^3 + x^4 + x^5)^{k+1}$$

で与えられる。ただし $[x^n]$ は x^n の係数を表す。

証明. 各ブロックの長さを選ぶ操作は、多項式 $x^3 + x^4 + x^5$ の項を一つ選ぶ操作に対応する。 $k+1$ 個のブロックの長さの総和が n となる選択を係数が数えている。□

注意 3.9 (休憩均等性の二つの解釈). 「3~5 団体ごとに休憩する」条件と、「各ブロック長の差を 1 以下にする」条件は異なる。本稿では前者を標準条件とする。後者を追加したい場合は、許されるブロック長列の集合を制限すればよい。後者の場合は $q = \lfloor n/(k+1) \rfloor$, $r = n \bmod (k+1)$ を用いて $\binom{k+1}{r}$ 通りの長さ列が得られる。ただし、実際に現れるブロック長が 3 以上 5 以下となること、すなわち $r=0$ のときは $3 \leq q \leq 5$, $r > 0$ のときは $3 \leq q \leq 4$ を満たす範囲に限る。

3.2 個人の出演数から得られる必要条件

命題 3.10 (一人物に由来する休憩数の下界). π において、ある人物 p が合計 d_p 団体に所属するなら、その人物の休憩なしの連続出演を避けるためには

$$k \geq \max\{0, 2d_p - n - 1\}$$

が必要である。

証明. 人物 p が出演する d_p 団体の間には、少なくとも $d_p - 1$ 箇所の区切りがある。その各区切りには、 p が出演しない団体を少なくとも一つ置くか、休憩を入れる必要がある。 p が出演しない団体は $n - d_p$ 組しかなく、休憩は k 回であるから、 $d_p - 1 \leq (n - d_p) + k$ が必要である。□

注意 3.11. これは必要条件であり、十分条件ではない。複数人物の掛け持ち関係が重なると、各人物についてこの不等式が成立しても全体として不可能な場合がある。

4 一般的な数え上げ式

定義 4.1 (長さパターンの集合).

$$\mathcal{L}_{n,k} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \{3, 4, 5\}^{k+1} : \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = n\}$$

とする。長さパターン λ は休憩位置集合 $D(\lambda)$ を一意に定める。

定義 4.2 (実行可能タイムテーブルの集合). 休憩回数 k の実行可能タイムテーブルの集合を

$$\mathcal{T}_k(X; a, z) = \{(\pi, D(\lambda)) : \pi \in \mathfrak{S}_n, \pi_1 = a, \pi_n = z, \\ \lambda \in \mathcal{L}_{n,k}, c_{\pi_j, \pi_{j+1}} = 1 (j \notin D)\}$$

とする。その総数を $T_k(X; a, z) = |\mathcal{T}_k(X; a, z)|$ と表す。

定義 4.3 (固定長さパターンの計数). $\lambda \in \mathcal{L}_{n,k}$ を一つ固定したとき、

$$\mathcal{T}_\lambda(X; a, z) = \{(\pi, D(\lambda)) \in \mathcal{T}_k(X; a, z)\}$$

とおき、 $T_\lambda(X; a, z) = |\mathcal{T}_\lambda(X; a, z)|$ と書く。したがって $T_k(X; a, z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{n,k}} T_\lambda(X; a, z)$ である。添字や端点の記述を省略する場合は、対象の所属構造と固定端点を文脈から指定する。

定理 4.4 (一般計数式). 任意の所属行列 X と異なる固定端点 a, z に対して、

$$T_k(X; a, z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{n,k}} \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_n \\ \pi_1 = a, \pi_n = z}} \prod_{\substack{1 \leq j < n \\ j \notin D(\lambda)}} c_{\pi_j, \pi_{j+1}}$$

が成立する。

証明. 積はすべての休憩なしの隣接関係が許される場合に限って 1 であり、それ以外は 0 である。したがって各組 (π, D) について条件を満たすときにちょうど 1 だけ加算される。□

注意 4.5. この公式は問題を厳密に定義するが、直接評価すると置換を列挙するため計算量が極めて大きい。閉形式で評価できることを意味するわけではない。また m, n および各人の掛け持ち数 d_p だけでは一般に総数が定まらず、所属行列 X または同等の関係情報が必要である。

系 4.6 (掛け持ちのない場合). 異なる団体間で所属人物が重複しないとき、

$$T_k(X; a, z) = (n-2)! [x^n] (x^3 + x^4 + x^5)^{k+1}$$

となる。

証明. すべての $c_{ij} = 1$ であるから、各長さパターンに対して両端を固定した $(n-2)!$ 通りの順列がすべて許される。命題 3.8 を適用すればよい。□

系 4.7 (一般上界). 任意の所属行列について

$$0 \leq T_k(X; a, z) \leq (n-2)!R(n, k)$$

が成り立つ。

証明. 禁止条件を取り除いたものが右辺である。条件の追加は通り数を増やさない。□

4.1 最小休憩回数

定義 4.8 (最小休憩回数). $T_k(X; a, z) \neq \emptyset$ となる k が存在するとき、

$$k^*(X; a, z) = \min\{k : T_k(X; a, z) > 0\}$$

とする。実行可能な k が存在しない場合には、 k^* は未定義とする。

休憩回数をなるべく少なくするという条件は、休憩が増えれば常に望ましいという条件とは異なる。例えばブロック長を 3~5 に制限すると、ある k では成立しても、より大きい k では分割が制約に合わず成立しないことがありうる。したがって存在判定は k を小さい順に行う。

5 人物の出演位置に対する公平性

5.1 公平性を一つの量で表す

本稿では「同じ人物が序盤に固まり、終盤には出演しない」といった偏りを測るため、出演した団体数の累積偏差を用いる。これは一つのモデル化の選択であり、身体的負担や機材移動の難しさを完全に表現するものではない。

定義 5.1 (累積出演数). タイムテーブル π の先頭 j 団体までに人物 p が出演した回数を

$$s_p(j; \pi) = \sum_{h=1}^j x_{p, \pi_h} \quad (0 \leq j \leq n)$$

とする。 $s_p(0; \pi) = 0$ 、 $s_p(n; \pi) = d_p$ である。

定義 5.2 (個人の累積偏差). 人物 p の出演が全体に均等に分散している場合の理想累積出演数を jd_p/n とする。個人の最大累積偏差を

$$E_p(\pi) = \max_{0 \leq j \leq n} \left| s_p(j; \pi) - \frac{jd_p}{n} \right|$$

と定める。

定義 5.3 (最大公平性偏差). 少なくとも 2 団体に出演する人物の集合を $P_2 = \{p : d_p \geq 2\}$ とする。 $P_2 \neq \emptyset$ のとき、

$$F_X(\pi) = \max_{p \in P_2} E_p(\pi)$$

と定義する。 $P_2 = \emptyset$ のときは $F_X(\pi) = 0$ と定める。

注意 5.4. ここでは、一団体にしか出演しない人の出演位置は最適化対象としない。これは実務上の優先順位を明示した定義であり、普遍的に唯一の公平性指標ではない。必要なら全員を含めた別モデルも定義できる。

5.2 整数化した偏差と状態の圧縮

定義 5.5 (出演済み集合の偏差). $S \subseteq V$ に対して $c_p(S) = \sum_{i \in S} x_{pi}$ を定義し、

$$\Delta_X(S) = \max_{p \in P_2} |nc_p(S) - |S|d_p|$$

とする。 $P_2 = \emptyset$ のときは 0 とする。

命題 5.6 (偏差は出演済み集合のみに依存する). 出演済み団体の集合が S である任意の部分タイムテーブルにおいて、直後の累積偏差の整数化値は $\Delta_X(S)$ に等しい。特に、その値は S 内の団体の演奏順序には依存しない。

証明. 先頭 $j = |S|$ 団体までの出演回数は $c_p(S)$ に等しく、同じ S に属する団体を並べ替えても変化しない。定義に代入すればよい。□

よって、最適化したい量は

$$nF_X(\pi) = \max_{0 \leq j \leq n} \Delta_X(\{\pi_1, \dots, \pi_j\})$$

と表せる。分母 n を除くことで計算を整数演算だけで実装できる。

5.3 公平性の簡単な下界

命題 5.7 (両端固定による偏差の下界). 固定トップが a 、固定トリが z である場合、任意の出演順序 π に対して

$$nF_X(\pi) \geq \max_{p \in P_2} \max\{|nx_{pa} - d_p|, |nx_{pz} - d_p|\}$$

が成り立つ。

証明. $j = 1$ では $s_p(1; \pi) = x_{pa}$ なので、整数化した偏差は $|nx_{pa} - d_p|$ である。 $j = n - 1$ では $s_p(n - 1; \pi) = d_p - x_{pz}$ であるから、整数化した偏差は $|d_p - nx_{pz}|$ に等しい。それぞれの最大値は全時点の最大値を超えない。□

注意 5.8. 命題 5.7 の下界は、演奏順の途中を一切調べずに評価できる。トップとトリの固定が、公平性の最適値に与える影響を調べる際の基本的な指標となる。

5.4 辞書式最適化

定義 5.9 (最適公平性と最適解の総数). k^* が存在するとき、

$$F^*(X; a, z) = \min_{(\pi, D) \in \mathcal{T}_{k^*}(X; a, z)} F_X(\pi)$$

とする。また

$$N^*(X; a, z) = |\{(\pi, D) \in \mathcal{T}_{k^*}(X; a, z) : F_X(\pi) = F^*\}|$$

と定める。

本稿の最適化は二段階である。第一に休憩回数を最小にし、その条件のもとで第二に最大偏差を最小にする。両方を満たした配置のみが N^* に数えられる。「必要条件を満たすすべての配置の数」 T_{k^*} と、「公平性まで最適な配置の数」 N^* は明確に区別しなければならない。

6 集合状態を用いた厳密計算法

6.1 偏差のしきい値を固定して数える

公平性の整数化しきい値を非負整数 Q とする。休憩回数 k としきい値 Q のもとで

$$H_X(k, Q) = \#\{(\pi, D) \in \mathcal{T}_k(X; a, z) : nF_X(\pi) \leq Q\}$$

と定義する。 $H_X(k, \infty) = T_k(X; a, z)$ と書く。

命題 6.1 (最適解数のしきい値表示). 実行可能なタイムテーブルが存在するとき、

$$\begin{aligned} k^* &= \min\{k : H_X(k, \infty) > 0\}, \\ Q^* &= \min\{Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : H_X(k^*, Q) > 0\}, \\ N^* &= \boxed{H_X(k^*, Q^*)}, \quad F^* = Q^*/n \end{aligned}$$

が成立する。

証明. 第一式は k^* の定義である。 $nF_X(\pi)$ は整数であるため、実行可能な値の最小値 Q^* が存在する。しきい値 Q^* 以下を満たす配置はすべてちょうど最適値 Q^* を達成する。よって最後の式が成立する。□

6.2 固定した休憩位置に対する状態遷移

休憩位置 D を固定する。 $S \subseteq V, i \in S, \ell \in \{1, \dots, 5\}$ に対して、 $D_Q(S, i, \ell)$ を次の条件を満たす部分タイムテーブルの通り数とする。すなわち、出演済み団体が S 、最後の団体が i 、現在のブロック長が ℓ 、これまでのすべての前方部分集合 U に対して $\Delta_X(U) \leq Q$ が成立するものを数える。

トップ固定の初期条件は

$$D_Q(\{a\}, a, 1) = \mathbf{1}(\Delta_X(\{a\}) \leq Q)$$

である。 $j \notin S$ を次の団体として追加するとき、

- $|S| \notin D$ の場合、 $c_{ij} = 1$ なら休憩なしで追加する。
- $|S| \in D$ の場合、 c_{ij} の値にかかわらず休憩を挟んで追加する。
- 追加後には常に $\Delta_X(S \cup \{j\}) \leq Q$ を要求する。
- トリ z は最後の位置でのみ追加する。

したがって ℓ' を、休憩を挟まないとき $\ell + 1$ 、挟むとき 1 として

$$D_Q(S \cup \{j\}, j, \ell') += D_Q(S, i, \ell)$$

という更新を行う。 D が与えられていれば、各位置で許される ℓ' は決まる。最後まで配置した状態を合算し、すべての長さパターンについて足せば $H_X(k, Q)$ を得る。

6.3 全長さパターンを同時に扱う状態

休憩位置を固定せずに扱う場合は、状態に現在の休憩回数 h を追加し、 $D_Q(S, i, \ell, h)$ とする。

休憩なしの遷移は、 $\ell < 5, c_{ij} = 1$ 、および追加後の偏差条件を満たす場合に

$$D_Q(S \cup \{j\}, j, \ell + 1, h) += D_Q(S, i, \ell, h)$$

とする。休憩ありの遷移は、 $3 \leq \ell \leq 5$ かつ $h < k$ の場合に

$$D_Q(S \cup \{j\}, j, 1, h + 1) += D_Q(S, i, \ell, h)$$

とする。全団体の終了時には休憩回数 $h = k$ および最後のブロック長 $3 \leq \ell \leq 5$ を確認する。トリ z を最終位置以外で使うことは禁止する。

定理 6.2 (しきい値固定 DP の正確性). 上記の初期条件・遷移・終端条件で得られる最終状態の数の和は $H_X(k, Q)$ に等しい。

証明. どの実行可能タイムテーブルにも、最初の団体から順に団体の一つ追加する唯一の構成列がある。各遷移は連続出演禁止、ブロック長、固定端点、累積偏差の条件をすべて確認するため、不適合な構成列は数えない。逆に、条件を満たすタイムテーブルの各前方部分列は、上記のいずれかの状態遷移に対応する。従って、実行可能な各配置を過不足なく一回数える。 $\square$

注意 6.3 (途中の最良値のみを残す方法の危険). 状態 (S, i, ℓ, h) ごとに「これまでの最大偏差が最小の経路だけ」を残すと、最適な値の計算には有効であっても、最適解の総数を数え落とすことがある。途中段階では偏差が大きい経路も、後の共通した偏差によって最終的に同じ最大偏差となるためである。通り数の厳密計算では、 Q を固定した上で該当する経路をすべて計数する。

6.4 計算量について

部分集合 S の種類は 2^n であり、直前の団体 i 、ブロック長、休憩回数を状態に含めるため、計算量は一般に指数的に増大する。公平性 $\Delta_X(S)$ の事前計算には人物の所属集合情報を利用する。団体数が 24 程度であればビット集合による実装を検討できるが、30 以上の団体では、状態削減、探索順序、対称性、メモリ管理などの追加の工夫が必要になる。

注意 6.4 (整数の桁数). 一般のタイムテーブル総数は階乗規模となる。32 ビットまたは 64 ビット整数の範囲を超える可能性があるため、実装時には多倍長整数または安全な範囲の 128 ビット整数などを選択する必要がある。小規模な合成例は 64 ビット整数に収まるが、一般の入力では十分な桁数を保証する必要がある。

7 演奏ブロックによる分解

7.1 ブロック内の数え上げ

定義 7.1 (ブロックの並べ方). $S \subseteq V$ 、 $3 \leq |S| \leq 5$ に対して、 $h_X(S)$ を S 内の全団体を休憩なしで一度ずつ並べ、隣接する団体が常に連続可能である順序の数とする。 $h_{X,a}(S)$ は a を先頭に固定した数、 $h_{X,z}^{\text{end}}(S)$ は z を末尾に固定した数とする。不適切な集合に対しては 0 とする。

$|S| \leq 5$ だから、 $h_X(S)$ は高々 $5! = 120$ 通りの順列を検査することで計算できる。これに対して、どの団体を同じブロックに入れるかを選ぶ問題は依然として大規模である。

定理 7.2 (ブロック分解公式). $k \geq 1$ を固定する。 V を非空の順序付き集合列 $(S_1, \dots, S_{k+1})$ に

分割し、 $3 \leq |S_j| \leq 5$ を課するとき、

$$T_k(X; a, z) = \sum_{\substack{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_{k+1} = V \\ 3 \leq |S_j| \leq 5}} h_{X,a}(S_1) \left(\prod_{j=2}^k h_X(S_j) \right) h_{X,z}^{\text{end}}(S_{k+1})$$

が成立する。

証明. 休憩を挟むブロック間では、同じ人物の連続出演を許す。そのため、特定のブロック分割が与えられれば、各ブロック内の許される順序は互いに独立に選べる。先頭・末尾ブロックのみ固定条件を課し、すべての順序付き分割を合計すればよい。□

注意 7.3. 演奏ブロックに対する所属団体集合の順番が異なれば、別のタイムテーブルとして数える。したがって、ブロック分割を順序なしで数える場合には、適切な順列係数が必要である。

7.2 内部ブロックの対称性

全体の T_k は、ある一つの長さ列 λ を固定した計数値ではなく、**許される長さ列すべてにわたって合計した値**である。内部ブロックを入れ替えると長さ列も一般には入れ替わることに注意する。

定理 7.4 (内部ブロック対称性による整除性). $k \geq 1$ とし、公平性を制限しない。休憩回数がちょうど k 回の実行可能タイムテーブル数は

$$(k-1)! \mid T_k(X; a, z)$$

を満たす。

証明. 最初のブロックには a が、最後のブロックには z がある。中間の $k-1$ 個の演奏ブロックを丸ごと任意の順序に入れ替えても、ブロック内の連続可能性とブロック長の条件は変化しない。各ブロックは互いに素な非空の団体集合からなるため、中間ブロックの異なる置換は異なるタイムテーブルを与える。したがって、すべての実行可能タイムテーブルは $(k-1)!$ 個を一組とする軌道に分かれる。□

注意 7.5. これは公平性を含めない T_k に対する主張である。公平性 F_X は出演位置を参照するため、中間ブロックの入れ替えによって値が変化し得る。ゆえに最適解数 N^* が $(k-1)!$ で割り切れるとは一般にいけない。

7.3 順序なし集合分割への圧縮

$U \subseteq V$ 、非負整数 j に対し、 $P_j(U)$ を、 U をサイズ 3~5 の j 個の順序を付けないブロックに分割したときの $\prod h_X(S)$ の総和とする。初期条件は $P_0(\emptyset) = 1$ 、 $U \neq \emptyset$ なら $P_0(U) = 0$ とする。

命題 7.6 (順序なしブロックの漸化式). $U \neq \emptyset$ とし $u = \min U$ とする。このとき、

$$P_j(U) = \sum_{\substack{S \subseteq U, u \in S \\ 3 \leq |S| \leq 5}} h_X(S) P_{j-1}(U \setminus S)$$

が成り立つ。

証明. u を含むブロック S は分割の中で一意に定まる。これを取り除けば、残りは $j-1$ 個の順序なしブロックに分割される。この対応は全単射である。 $\square$

系 7.7 (順序なし分割を利用した計数). $k \geq 1$ のとき、

$$T_k = (k-1)! \sum_{\substack{A, C \subseteq V, A \cap C = \emptyset \\ a \in A, z \in C \\ 3 \leq |A|, |C| \leq 5}} h_{X,a}(A) h_{X,z}^{\text{end}}(C) P_{k-1}(V \setminus (A \cup C))$$

が成立する。

証明. 先頭ブロック A と末尾ブロック C を選んだ後、中間ブロックを順序なしで分割する。中間ブロックの並べ替えは $(k-1)!$ 通りであり、休憩をまたいだ連続条件は課さない。 $\square$

7.4 公平性を含むブロック単位の漸化式

公平性のしきい値 Q を固定する。すでに出演した団体集合を U とし、次に追加するブロックの団体集合を S とする。 S の並べ方のうち、連続出演禁止を守り、 S の各途中位置まで追加した任意の $W \subseteq S$ (ただし W はその並びの前方部分集合) について $\Delta_X(U \cup W) \leq Q$ となるものの数を $h_{X,Q}(U, S)$ と定める。最初と最後のブロックでは固定端点の条件も課す。

命題 7.8 (公平性つきブロック漸化式). 固定したブロック数 b と公平性しきい値 Q に対し、 $D_0(\emptyset) = 1$ から始めて、

$$D_{j+1}(U \cup S) += D_j(U) h_{X,Q}(U, S)$$

と更新すれば、 $D_b(V)$ は対応する条件を満たすタイムテーブル総数となる。最初と最後のブロックには端点固定を課し、各ブロック長を 3~5 とする。

証明. 各タイムテーブルのブロック分割は一意であり、各ブロック内部の順序も一意に定まる。 U はそれまでの出演集合を記録しているので、後の公平性判定に必要な情報はすべて計算可能である。全構成列に一対一に対応する更新を行うため、過不足なく数えられる。□

8 包除原理と禁止辺の構造

8.1 禁止辺ごとの事象

重複グラフの各辺 $e = \{i, j\} \in E_X$ に対し、 $\mathcal{A}_e$ を「 i, j が休憩なしで隣接する」という事象とする。ブロック長列 λ と固定端点を満たす候補全体を Ω_λ とする。

定理 8.1 (包除原理による計数). $F \subseteq E_X$ とし、 $A_\lambda(F)$ をすべての $e \in F$ が休憩なしの隣接として現れる候補数とする。このとき、

$$T_\lambda(X; a, z) = \sum_{F \subseteq E_X} (-1)^{|F|} A_\lambda(F)$$

となる。

証明. 禁止事象 $\mathcal{A}_e$ のいずれも起こらない候補の個数を、有限集合に対する包除原理で数えたものである。□

補題 8.2 (非零項の線形森条件). $A_\lambda(F) > 0$ ならば、グラフ (V, F) の各頂点の次数は高々 2 であり、閉路を含まない。また、各非孤立連結成分は高々 5 頂点の道である。

証明. 一つの出演順序において、各団体は直前と直後の高々 2 団体としか隣接しない。さらに、休憩を挟まない隣接辺全体は、各演奏ブロック内の一つの道の部分グラフである。したがって、分岐や閉路は生じず、連結した部分の頂点数はブロックの最大長 5 を超えない。□

注意 8.3. 線形森で各成分の大きさが 5 以下であっても、必ず $A_\lambda(F) > 0$ になるとは限らない。トップ・トリが道の内部にある場合や、成分の大きさがブロック長に収まらない場合があるからである。補題 8.2 は必要条件である。

8.2 線形森の成分から強制隣接数を求める

F が線形森であるとし、孤立頂点も 1 頂点の成分とみなす。道成分の頂点数を $s_1, \dots, s_c$ とする。トップ a とトリ z が同じ成分にあるとき、休憩が 1 回以上存在すれば $A_\lambda(F) = 0$ となる。また a, z は、それぞれ属する道成分の端点でなければならない。

条件を満たす場合、道成分を休憩で区切ったブロックへ割り振り、その合計サイズが所定の λ_j になるようにする。最初のブロックには a の成分、最後には z の成分を配置する。各非自明な内部成分には向きが 2 通りあり、端点固定の成分の向きは固定される。各ブロック内では成分を一つの塊として並べられる。

この操作は、禁止辺のすべてが隣接する順序を構成する。従って、 $A_\lambda(F)$ は成分の割当と向きに関する有限和へ分解できる。係数の具体的な形式は付録 B に示す。

8.3 非零項の削減と計算上の限界

最大ブロック長 5 という条件により、包除式に現れる非零項は限定される。しかし、禁止辺の総数が多い場合には、線形森となる部分集合自体も多数存在する。したがって、包除式が常に動的計画法より高速であるとは限らない。どの所属構造で有利になるかを見極めることが今後の研究課題となる。

9 所属パターンの圧縮

9.1 同じ所属パターンを持つ人物

定義 9.1 (所属パターンの同値関係). 人物 p, q に対して $p \sim q$ を $A_p = A_q$ で定義する。つまり、同じ団体群に所属する人物を同じ同値類にまとめる。

命題 9.2 (同一所属パターンの重複は計数条件を変えない). 人物 p, q が $A_p = A_q$ を満たすならば、一方の人物の所属情報を連続出演条件の判定から取り除いても、重複グラフ G_X は変化しない。また、最大値型の公平性指標 F_X についても、同じ所属パターンを持つ人物の重複を除いて値を評価できる。

証明. 任意の団体ペアについて、 p が共通メンバーなら q も共通メンバーであるため、禁止辺の有無は変化しない。さらに任意の順序と位置において、 p, q の累積出演数と所属数は一致し、偏差も等しい。その最大値に同じ値を二度含めても結果は変わらない。□

9.2 所属集合の包含と冗長性

命題 9.3 (包含による禁止関係の冗長性). $A_p \subseteq A_q$ ならば、 p の連続出演禁止制約は q の連続出演禁止制約に包含される。

証明. p が共通出演する任意の団体ペア $\{i, j\} \subseteq A_p$ は、 A_q にも含まれている。よってそのペアは禁止関係として引き続き残る。□

注意 9.4. 命題 9.3 で省略できるのは連続出演判定に必要な制約情報である。人物 p の所属データそのものを公平性評価から消してよいとは限らない。禁止関係の圧縮と公平性の圧縮は区別する。

9.3 禁止ペアを保持する最小制約表現

人物 p の所属が禁止するペア集合を

$$E_p^{\text{all}} = \{\{i, j\} : i, j \in A_p, i < j\}$$

とする。このとき $E_X = \bigcup_p E_p^{\text{all}}$ が成立する。

連続出演の禁止関係を保存する人物集合 $Q \subseteq P$ は

$$\bigcup_{p \in Q} E_p^{\text{all}} = E_X$$

を満たす集合である。最小制約表現の大きさを

$$\rho(X) = \min\{|Q| : Q \subseteq P, \bigcup_{p \in Q} E_p^{\text{all}} = E_X\}$$

と定義できる。これは禁止辺集合の集合被覆問題として表現される。

注意 9.5. $\rho(X)$ は連続出演条件の圧縮度を測る候補となるが、この値だけからタイムテーブル数が決まるわけではない。ここで新たな不変量の名称を付すことはできるものの、既存の集合被覆量との対応および研究上の有用性を検証する必要がある。

10 制約解除の影響と相互作用

10.1 一人の制約の影響

人物 p が唯一の共通人物となる団体ペアの集合を

$$U_p = \{\{i, j\} : B_i \cap B_j = \{p\}, i < j\}$$

とし、 $u_p = |U_p|$ と定義する。 u_p は人物 p の連続出演禁止制約を解除した際に、初めて許される団体ペアの数である。

命題 10.1 (独自禁止辺がない場合). $u_p = 0$ ならば、人物 p の連続出演禁止制約のみを解除しても、 $T_k(X; a, z)$ は変化しない。

証明. $u_p = 0$ は、 p の所属により禁止される任意の団体ペアに、 p 以外の共通人物が存在することを意味する。従って p の制約を取り除いても連続可能性行列は不変である。□

注意 10.2. 逆は一般には成立しない。 $u_p > 0$ でも、固定端点や休憩条件のために新しく許されたペアをどの実行可能順序でも利用できなければ、総数は変化しない。

10.2 複数人物の制約解除

$R \subseteq P$ を、連続出演を許可する人物の集合とする。 R に含まれない人物の禁止条件は保持する。休憩回数 k とその他の条件を固定した上で、該当するタイムテーブル総数を $T_k(R)$ と書く。

定義 10.3 (違反人物の集合). 候補タイムテーブル τ において、休憩なしで隣接する両団体に所属する人物全体の集合を $V(\tau) \subseteq P$ とする。

定理 10.4 (制約解除数の分解). $R \subseteq P$ とし、 $b_k(U)$ を $V(\tau) = U$ となる候補タイムテーブルの数とする。このとき

$$T_k(R) = \sum_{U \subseteq R} b_k(U)$$

が成り立つ。

証明. R の人物のみ連続出演を許すときに認められる候補とは、違反人物の集合が R の部分集合である候補にほかならない。これらを $V(\tau)$ ごとに分割して数える。 $\square$

系 10.5 (メビウス反転による厳密相互作用).

$$b_k(U) = \sum_{R \subseteq U} (-1)^{|U|-|R|} T_k(R)$$

が成り立つ。

証明. 有限集合の部分集合束上のメビウス反転を適用する。 $\square$

定理 10.6 (制約解除の超モジュラ性). $R \subseteq P$ と $p, q \notin R$, $p \neq q$ に対して

$$T_k(R \cup \{p, q\}) - T_k(R \cup \{p\}) - T_k(R \cup \{q\}) + T_k(R) \geq 0$$

が成立する。

証明. 定理 10.4 の表示を用いれば、左辺は $V(\tau) \subseteq R \cup \{p, q\}$ であり、かつ $p, q \in V(\tau)$ を満たす候補の個数に等しい。従って非負整数である。 $\square$

注意 10.7 (最適条件を固定する必要). この超モジュラ性を用いる際は、休憩数や公平性のしきい値を固定する必要がある。制約を解除するごとに最小休憩数 k^* や公平性の最適値 F^* を再定義した結果については、同じ差分不等式が成立するとは限らない。

10.3 人物違反母関数

定義 10.8 (違反母関数). 人物 p がタイムテーブル τ で休憩なしに連続出演する隣接箇所の個数を $v_p(\tau)$ とする。候補集合 Ω について

$$\Phi_X(z_1, \dots, z_m) = \sum_{\tau \in \Omega} \prod_{p=1}^m z_p^{v_p(\tau)}$$

と定義する。

すべての $z_p = 0$ を代入すると違反が全くない候補数が得られる。ただし $0^0 = 1$ という多項式評価上の通常の約束を用いる。特定の人物だけ $z_p = 1$ にすれば、その人物の連続違反のみを許す候補数が得られる。

命題 10.9 (人物違反多項式の次数). $\deg_{z_p} \Phi_X \leq \max\{0, d_p - 1\}$ である。

証明. 人物 p の所属団体数は d_p である。 d_p 個の出演が一行に配置されたとき、その人物が休憩なしで連続出演する隣接箇所は高々 $d_p - 1$ 箇所である。□

注意 10.10. 高次数の項が消えることは、すべての組合せが小さいとは限らないことに注意する必要がある。多項式全体の変数数や非零単項式の数、掛け持ちする人物の増加とともに大きくなる。

11 特殊な所属構造の計数公式

11.1 一人物のみが掛け持ちする場合

一人物 p が r 団体に所属し、それ以外の人物はそれぞれ高々 1 団体に所属するとする。また、固定トップ a 、固定トリ z は人物 p の所属団体ではないものとする。

定義 11.1 (隣接しない選択の多項式).

$$P_s(x) = \sum_{j=0}^{\lceil s/2 \rceil} \binom{s-j+1}{j} x^j$$

と定義する。 x^j の係数は、 s 個の枠から互いに隣接しない j 個の枠を選ぶ方法の数を表す。

定理 11.2 (単独掛け持ち人物の公式). 休憩回数が 1 回以上でブロック長が $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_b)$ のと

き、前述の条件下で実行可能なタイムテーブル数は

$$T_{\lambda} = r!(n-r-2)! [x^r] \left(P_{\lambda_1-1}(x) \prod_{j=2}^{b-1} P_{\lambda_j}(x) P_{\lambda_b-1}(x) \right)$$

となる。

証明. トップとトリは人物 p が所属しない団体で固定されているため、最初と最後のブロックの自由な位置数は、それぞれ $\lambda_1 - 1$ と $\lambda_b - 1$ である。内部ブロックでは λ_j 個の位置が自由である。各ブロック内で人物 p の所属団体が連続しない位置選択を P_s が数える。全体で r 箇所を選ぶ方法は積の x^r の係数である。選ばれた位置には r 個の異なる所属団体を $r!$ 通り、残る自由位置には $n - r - 2$ 個の非所属団体を $(n - r - 2)!$ 通り配置できる。 $\square$

例 11.3 (10 団体、1 人が 4 団体所属). トップとトリは掛け持ち人物の所属しない団体とし、休憩配置を $(5, 5)$ とする。このとき

$$P_4(x) = 1 + 4x + 3x^2, \quad [x^4]P_4(x)^2 = 9.$$

従って

$$T_{(5,5)} = 4! 4! \times 9 = 5184.$$

11.2 複数の掛け持ち人物がいる場合

人物を $1, \dots, h$ とし、各団体に、その団体へ所属する掛け持ち人物の集合 $S_i \subseteq \{1, \dots, h\}$ を割り当てる。休憩なしで団体 i, j が連続できるのは、 $S_i \cap S_j = \emptyset$ の場合である。

このとき、所属パターンの種類は最大 2^h 個となる。各種類を状態とする転送行列を構成し、ブロック内の連続可能性に従う列を多変数の母関数で数える方法がある。しかし、 h が大きい場合に 2^h の全種類を使用すると計算が難しくなるため、実際に出現する所属パターンだけを記憶する方法が望ましい。

注意 11.4. 人物ごとの所属団体集合が互いに素でも、各人物の並べ方の数を単純に掛けることはできない。異なる人物に属する団体も同一の出演枠を使うからである。所属パターンを同時に数える母関数や多変数漸化式が必要になる。

12 小規模計算による検算

12.1 計算方法の検証方針

数え上げ公式には、計算上の桁あふれ、端点条件の実装ミス、休憩位置の二重計数、途中段階での偏差しきい値の誤処理などの可能性がある。そこで、団体数が小さい例では、(i) 全順列の直接検査、(ii) 集合状態による動的計画法、(iii) 可能ならブロック分解、の結果を比較する。

12.2 8 団体の包除原理検算

8 団体について、トップを B01、トリを B08 に固定する。禁止ペア（団体番号は 1 から 8 とする）を

$$E_X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{2, 6\}\}$$

の 9 組とする。この禁止関係を作る合成例は、各禁止ペアに対応する人物を 1 人ずつ置き、それぞれの人物を当該 2 団体だけに所属させることで構成できる。その際、各禁止ペアに固有の 2 団体掛け持ち人物を配置し、各団体の残りの枠には専属人物を加えて 6 人編成とするので、これ以外の禁止ペアは生じない。この合成例で休憩 1 回を固定すると、各長さパターンに対して次の結果が得られる。この例は、包除公式が具体的な禁止関係で正しく機能することを示す検算であり、数値その

表 1 8 団体に対する全列挙と包除原理の照合

演奏ブロック長	全列挙	包除原理
(4, 4)	50	50
(3, 5)	54	54
(5, 3)	59	59
合計	163	163

ものが一般定理を証明するわけではない。禁止ペアの集合、固定端点、および各長さパターンが上で明示されているため、全順列を直接列挙することによって表の値を検算できる。

12.3 8 団体の公平性計算検算（端点を明記した合成例）

別の 8 団体の架空例として、所属タイプ A、B、C をそれぞれ 3 団体、3 団体、2 団体とする。各タイプに属する団体には、そのタイプだけに共通する 4 人の人物が所属し、団体ごとの専属人物 2 人を追加する。異なるタイプの間で人物は共有しない。全団体 6 人編成で、人物数は 28 人となる。

団体 ID は B01–B08 とし、順にタイプ A,A,A,B,B,B,C,C を割り当てる。トップを B01（A 型）、トリを B08（C 型）に固定する。

ここで長さパターンを (4, 4) に固定した場合、連続出演禁止を満たす総数は 108、整数化公平性の最適値は $Q^* = 6$ 、最適解数は 36 となる。他方、長さ (3, 5)、(4, 4)、(5, 3) をすべて認める標準問題では、休憩 1 回における実行可能総数は

$$T_1 = 348, \quad Q^* = 6, \quad N^* = 156$$

となり、公平性最適解の長さパターン別内訳は順に 48, 36, 72 である。108 と 36 は (4, 4) に固定した場合の値であって、全休憩位置を許した総数ではない。この所属構造は、前述の各タイプに共通する 4 人と各団体に固有な 2 人という構成によって一意に定まり、本文の情報だけで再構成できる。

12.4 団体人数が異なる合成例

別の完全な合成例として、8 団体・35 人からなる所属関係を表 2 のように定める。団体番号と人物番号はこの例のために人工的に与えたものであり、実在の催しの情報には対応しない。

表 2 8 団体・35 人の完全合成所属表

団体	所属人物（すべて架空の識別子）
B01	P01, P02, P03, P04, P05, P06
B02	P07, P08, P09, P10, P11
B03	P01, P12, P13, P14, P15, P16, P17
B04	P02, P07, P18, P19, P20, P21
B05	P01, P08, P22, P23
B06	P03, P12, P24, P25, P26, P27
B07	P09, P22, P28, P29, P30, P31, P32
B08	P02, P13, P33, P34, P35

団体人数は順に

$$(6, 5, 7, 6, 4, 6, 7, 5)$$

である。トップを B01、トリを B08 に固定し、各ブロック長を 3–5 とする。また、2 団体以上に所属する人物のみを公平性の最大値に含める。厳密計数の結果、

$$\boxed{k^* = 1}, \quad \boxed{T_1 = 59}, \quad \boxed{Q^* = 8}, \quad \boxed{N^* = 24}$$

となる。公平性最適値は $F^* = 8/8 = 1$ であり、長さパターン (3, 5)、(4, 4)、(5, 3) に対応する最適解数は 7、9、8 である。

本節の例はすべて完全に架空の所属関係に基づく。禁止ペア、タイプ別の所属規則、または表 2 の所属表によって入力条件を本文内に示した。小規模な例では全順列を直接調べる方法と集合状態による数え上げ法を比較し、結果の一致を確認した。

12.5 実務データを公開しない理由

研究動機となった実際の出演表には、個人の所属先や掛け持ち数に関する情報が含まれている。名前を単なる番号に置き換えても、団体数、所属分布、開催時期などとの照合によって個人や催しを推測できる可能性がある。したがって、**本公開版には実務データの所属分布、個人別の制約影響倍率、再識別につながり得る詳細集計、当該データの完全な行列を記載しない**。現実の事例での内部的な予備解析は、本稿に掲載する再現可能な数値実験とは区別する。

13 制約構造と数え上げ数の関係

13.1 なぜ掛け持ち数だけでは決まらないか

人物 p が d_p 団体に所属すると、当該人物によって禁止されうる団体ペアは $\binom{d_p}{2}$ 組となる。ただし、異なる人物による禁止ペアは重複しうる。したがって

$$|E_X| \leq \sum_{p=1}^m \binom{d_p}{2}$$

が成立する。右辺は掛け持ち数の分布だけから計算できるが、左辺にはペアの重複関係が反映されている。

命題 13.1 (禁止ペア数の上界).

$$|E_X| \leq \min\left\{\binom{n}{2}, \sum_{p=1}^m \binom{d_p}{2}\right\}$$

が成立する。

証明. 各人物の所属団体間のペア集合を合併して E_X を得る。合併の大きさは各集合の大きさの和を超えず、また全団体ペアの数を超えない。□

13.2 制約の影響度

$T_k(\emptyset) > 0$ とし、人物 p の連続出演禁止制約だけを解除した場合の影響倍率を

$$I_p^{(k)} = \frac{T_k(\{p\})}{T_k(\emptyset)}$$

と定める。この値は 1 以上だが、 d_p のみによって決まるわけではない。また u_p のみを知っても、実行可能な全体構造によって影響倍率が変化する。

こうした構造依存性を明らかにするためには、禁止辺の数だけでなく、その配置、グラフの連結成分、次数列、クリーク、独立集合、端点との位置関係、休憩ブロックへ分解できる性質などを考える必要がある。

13.3 計算を減らすための方向性

本稿の方法を踏まえ、次の三つの方向が考えられる。

1. **小さなブロックの前計算**：すべてのサイズ 3~5 の団体集合について、内部の有効順序数 $h_X(S)$ を求める。
2. **所属パターンの圧縮**：同一所属集合や冗長な禁止辺を整理する。ただし公平性は別に保存する。
3. **グラフ構造による分解**：禁止辺が特定の構造を持つとき、計数式の簡約やより速いアルゴリズムを導く。

ここで重要なのは、単に計数式を言い換えるだけでなく、実際の状態数、計算時間、メモリ、あるいは理論上の計算量がどれだけ改善されたかを示すことである。

13.4 個人別感度分析の位置づけ

制約影響倍率 $I_p^{(k)}$ は、特定人物の制約を解除したときの計数値の比である。所属数 d_p や独自禁止辺の個数 u_p だけでは、配置空間の全体的な形を一般には決定できないため、 $I_p^{(k)}$ の値もこれら二つだけで一意に定まるとは限らない。

実務データを使った個人別の予備分析は、本人の同意と再識別可能性の精査を経ていないため、本公開版には含めない。今後は公開可能な合成例で同じ (d_p, u_p) をもつ人物間の影響倍率の差を再現し、明示的な反例として独立に検算する必要がある。**個人別の非公開結果をそのまま定理の一般的証明に置き換えないことに注意する。**

14 研究上の限界と今後の課題

14.1 現時点で完成している部分

本稿で完成しているのは、基本問題の厳密な定式化、一般の数え上げ式、部分集合 DP およびブロック分解の基本的な漸化式、ならびに既存の組合せ論から導かれる基礎的な命題である。固定端

点、休憩、連続出演禁止、累積偏差の辞書式最適化を、一つのモデルで扱えるようにした。

14.2 まだ完成していない部分

1. 任意の大規模所属行列に対し、入力サイズの多項式時間で通り数を求める一般アルゴリズムは得られていない。
2. 掛け持ち数の分布など、少数の統計量だけから総数を決める閉じた式は得られていない。
3. 本稿の基礎命題について、既存研究に対する数学的な新規性は確認されていない。
4. 公平性関数 F_X が、出演者本人の負担感にどの程度一致するかの実証は行っていない。
5. より大規模な合成データに対する厳密計数の高速化と、第三者による独立再実装は今後の課題である。

14.3 未解決問題

問題 14.1 (制約構造からの計数). どのような重複グラフ G_X に対して、固定端点と有限長ブロックの制約を持つ $T_k(X; a, z)$ が、一般の場合より少ない計算量で厳密に求められるか。

問題 14.2 (公平性の上下界). 所属行列 X 、固定端点 a, z 、休憩条件から、 F^* に対する命題 5.7 より鋭い下界と、実際に達成できる上界を与えられるか。

問題 14.3 (影響倍率と局所制約). 独自禁止ペア数 u_p 、所属団体数 d_p および禁止辺の局所構造から、影響倍率 $I_p^{(k)}$ に対して意味のある上界・下界を与えられるか。

問題 14.4 (公平なタイムテーブルの個数). 休憩回数を最小化した後、最大累積偏差を最小化するタイムテーブルの総数 N^* を、一般の部分集合 DP より高速に計算できる構造条件は何か。

問題 14.5 (複数日の一般化). 1日開催のモデルを、開催日数 $d \geq 2$ へ拡張し、日ごとの出演数の不均衡と各日の累積偏差を同時に最小化する計数問題を定式化できるか。

問題 14.6 (より実務的な休憩と出演間隔). 休憩を挟めば連続出演を許可する条件に加え、同じ人物の演奏間にできれば2〜3団体の余裕を設けたいという選好を、必須条件とは別の目的関数として扱えるか。

14.4 公開用データとプライバシー

本公開版は実務で得られた所属表、個人別の分布、仮名化所属行列を掲載しない。掲載した計算例は、人物を特定できない独立の合成例のみから作成した。実務データについては、名前を取り除いても再識別の危険が残るため、本人の同意を含む適切な検討がない限り公開しない。

14.5 研究成果の提示方法

本稿は「新しい数学理論の完成」を宣言するものではなく、現実的な問題から出発した数え上げモデルとその計算法をまとめた研究ノートである。研究成果をウェブサイトや SNS で紹介する場合も、**導出した式、既知の理論、独立検算の程度、未検証の仮説**を区別することが望ましい。査読付き論文としての投稿を目指すには、先行研究の網羅的な比較、第三者による検算、問題設定の新規性または算法上の利点の明確化が必要である。

15 結論

本稿は、複数の演奏団体への重複所属を持つ人物集合を対象として、固定されたトップ・トリ、3～5 団体ごとの休憩、休憩なしの連続出演禁止、および個人の出演位置の公平性を同時に扱うタイムテーブル数え上げ問題を定義した。

総数を一般式で記述したうえで、最小休憩回数と最小最大累積偏差を辞書式に最適化し、その最適解数を厳密に求める部分集合 DP を導いた。また、小さい演奏ブロックの独立性、内部ブロック対称性、包除原理、所属集合の包含、制約解除に伴う相互作用等を利用して、問題の構造を整理した。

完全な合成例について、団体人数が異なる場合と所属タイプ別に重複する場合の正確な計数値を示した。各計数値は、与えられた所属集合が作る禁止関係に依存する。実務データに関する詳細な集計・計数結果はプライバシーに配慮して公開版に含めない。

将来の研究課題は、これらの定式化から、特定の所属構造に対してさらに簡潔な計数公式や計算量の改善を導くことである。その成果が既存の組合せ論に含まれないかを文献上も慎重に検証し、基礎的な数学研究として発展させたい。

付録 A 記号一覧

記号	意味
P, V	人物集合、団体集合
m, n	人物数、団体数
$X = (x_{pi})$	人物と団体の所属行列
A_p, B_i	人物 p の所属団体集合、団体 i の人物集合
d_p, ℓ_i	人物の所属団体数、団体の人数
w_{ij}	団体 i, j の共通人物数

記号	意味
c_{ij}	休憩なしでの連続可能性 (0 または 1)
G_X, H_X	重複グラフ、連続可能グラフ
a, z	固定トップ、固定トリ
π	出演順序を表す置換
D	休憩を入れる隙間の集合
k, b	休憩回数、演奏ブロック数 $b = k + 1$
λ	各演奏ブロックの団体数の列
T_k	休憩回数 k で条件を満たす総数 (公平性最適化前)
k^*	成立に必要な最小休憩回数
E_p, F_X	個人の最大累積偏差、公平性評価の対象者 (2 団体以上に所属する人物) についての最大累積偏差
$\Delta_X(S)$	出演済み集合 S に対する整数化偏差
Q^*, F^*	最小の整数化偏差、最適な公平性値
N^*	最小休憩数・最適公平性の両方を満たす総数
$R(n, k)$	休憩配置の長さ列の個数
$h_X(S)$	団体集合 S の休憩なしでの並べ方の数
u_p	人物 p の独自禁止ペア数
$I_p^{(k)}$	人物 p の制約解除による通り数の倍率
$\rho(X)$	連続出演禁止を維持するための最小制約表現人数
Φ_X	人物別の連続違反回数を記録する母関数

付録 B 強制隣接の成分公式 (補足)

$k \geq 1$ として、 F が線形森、成分を $C_1, \dots, C_c$ とする。 $s_i = |C_i|$ 、端点 a, z を含む成分をそれぞれ C_{i_a}, C_{i_z} とする。同じ成分に両端点がある場合、あるいはどちらかがその成分の内部頂点である場合、 $A_\lambda(F) = 0$ である。

以下、 $i_a \neq i_z$ であり、両者は該当する道成分の端点であるとする。各成分を $b = k + 1$ 個のブロックへ割り振る写像 $f: \{1, \dots, c\} \rightarrow \{1, \dots, b\}$ のうち、 $f(i_a) = 1$ 、 $f(i_z) = b$ 、および

$$\sum_{i: f(i)=j} s_i = \lambda_j \quad (1 \leq j \leq b)$$

を満たすものの集合を $\mathcal{F}$ とする。各ブロックに割り振られた成分数を $c_j = |f^{-1}(j)|$ とする。 h を頂点数 2 以上の成分数とし、 $\epsilon_a = \mathbf{1}(s_{i_a} \geq 2)$ 、 $\epsilon_z = \mathbf{1}(s_{i_z} \geq 2)$ とする。

このとき

$$A_{\lambda}(F) = 2^{h-\epsilon_a-\epsilon_z} \sum_{f \in \mathcal{F}} (c_1 - 1)!(c_b - 1)! \prod_{j=2}^{b-1} c_j!$$

となる。最初と最後の成分はそれぞれブロックの外側の端へ置かなければならず、向きも固定される。その他の非自明な道成分については向きが2通りある。内部ブロックの成分は自由に並べられる。この対応によって強制隣接事象を数えられる。

付録 C 厳密計数の手順

本稿の計数方法は、有限集合の操作と漸化式によって定義される。計算の流れを整理すると次のようになる。

1. 所属行列 X から、連続可能性 c_{ij} および各部分集合 $S \subseteq V$ の累積偏差 $\Delta_X(S)$ を定める。
2. 命題 6.1 に従い、ブロック長条件から許される休憩回数を小さい順に調べる。各休憩回数 k に対して公平性の上限を課さない $H_X(k, \infty)$ を数え、正となる最小の k を k^* とする。
3. $k = k^*$ に固定し、整数しきい値 Q を動かして $H_X(k^*, Q) > 0$ となる最小値 Q^* を求める。
4. そのしきい値で、定理 6.2 の状態遷移により $H_X(k^*, Q^*)$ を正確に数える。この値が最適タイムテーブル総数 N^* であり、最適公平性は $F^* = Q^*/n$ である。

各状態の通り数を保持するとき、同じ状態へ到達する異なる部分順序は加算する。公平性の最適値のみを保持して途中で経路を捨てると、最終的に最適となる配置の総数を数え落とす可能性がある。したがって、公平性しきい値を固定した計数が重要である。

付録 D 研究ノートとしての公開範囲

本稿は未査読の研究ノートであり、著者の数学的な定式化と検算の経過を記録したものである。学術誌における査読を受けた結果を意味するものではない。基礎命題の新規性、先行研究の網羅性、および現実の負担感に対する公平性指標の妥当性については、なお検討の余地がある。

例に用いた所属関係は、本文に条件を明記した独立の合成例に限る。研究の動機となった実際の催しについては、出演者本人や催しを推測し得る所属表・個人別集計を掲載しない。

参考文献

- [1] T. C. E. Cheng, J. E. Diamond, and B. M. T. Lin, “Optimal Scheduling in Film Production to Minimize Talent Hold Cost,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, 79(3), pp. 479–492, 1993. <https://doi.org/10.1007/BF00940554>

- [2] M. Garcia de la Banda, P. J. Stuckey, and G. Chu, “Solving Talent Scheduling with Dynamic Programming,” *INFORMS Journal on Computing*, 23(1), pp. 120–137, 2011. <https://doi.org/10.1287/ijoc.1090.0378>
- [3] N. Sakulsom and W. Tharmmaphornphilas, “Scheduling a music rehearsal problem with unequal music piece length,” *Computers & Industrial Engineering*, 70, pp. 20–30, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2013.12.017>
- [4] R. M. Adelson, J. M. Norman, and G. Laporte, “A dynamic programming formulation with diverse applications,” *Operational Research Quarterly*, 27, pp. 119–121, 1976.
- [5] A. Schaerf, “A Survey of Automated Timetabling,” *Artificial Intelligence Review*, 13(2), pp. 87–127, 1999. <https://doi.org/10.1023/A:1006576209967>
- [6] S. Ceschia, L. Di Gaspero, and A. Schaerf, “Educational timetabling: Problems, benchmarks, and state-of-the-art results,” *European Journal of Operational Research*, 308(1), pp. 1–18, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.07.011>
- [7] E. T. Bax, “Inclusion and exclusion algorithm for the Hamiltonian path problem,” *Information Processing Letters*, 47(4), pp. 203–207, 1993. [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(93\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0020-0190(93)90033-6)
- [8] E. T. Bax, “Algorithms to count paths and cycles,” *Information Processing Letters*, 52(5), pp. 249–252, 1994. [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(94\)00151-0](https://doi.org/10.1016/0020-0190(94)00151-0)