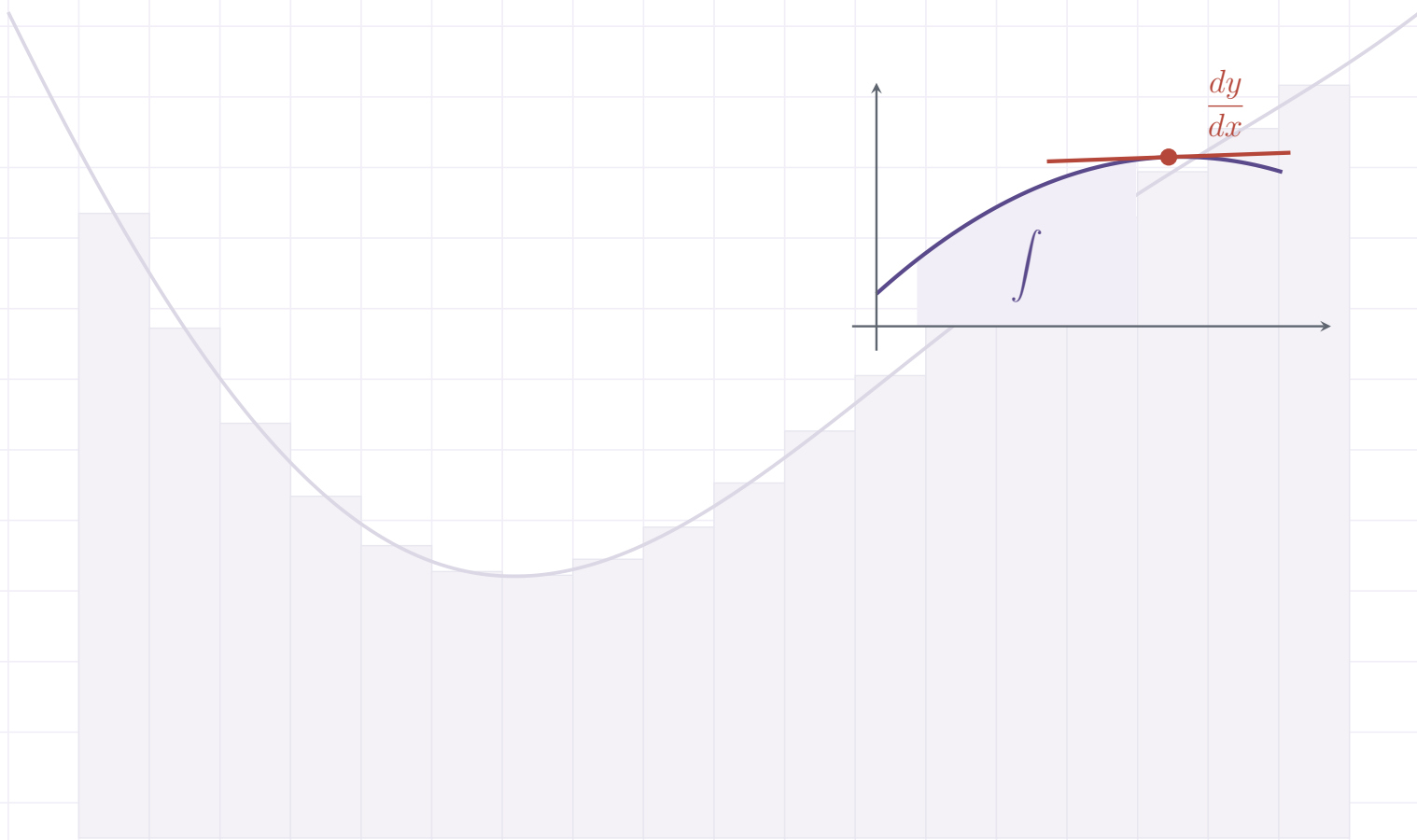


微分積分

Calculus



オリエンテーション

このオリエンテーションで話すこと

- 微分積分って、そもそも何をする学問なのか。高校の微分積分と何が違うのか。
- 全4章が、どんな順番でつながっているのか。
- このプリントの読み方と、つまずかずに進むコツ。

■ はじめに

ようこそ、大学の微分積分の世界へ！

微分積分は、線形代数と並んで大学1年生が最初に出会う数学なんだ。高校で数学IIIまで学んだ人なら、「微分なら知ってるよ」と思うかもしれない。実際、前半の計算の多くは高校の延長で、見覚えのある公式もたくさん出てくるよ。

でも大学の微分積分には、高校とは違うところが2つあるんだ。

- 「なぜそうなるのか」をきちんと説明する。たとえば「 $f' > 0$ なら増加」を、高校では当たり前として使っていたけど、大学では平均値の定理から証明する。
- 変数が2つ以上の関数を扱う。山の高さ $z = f(x, y)$ のような関数を微分したり積分したりする。これが後半の第3章・第4章だよ。

このオリエンテーションでは、全体の地図を先に見ておこう。

■ 微分積分ってどんな学問？

ひとことで言うと、微分積分は「変化」と「蓄積」を扱う数学なんだ。

■ **微分：その瞬間の変化をとらえる** 車のスピードメーターは、「今この瞬間」の速さを表示しているよね。でも「速さ = 距離 ÷ 時間」で計算しようとする、時間が0だと割り算ができない。そこで、時間をどんどん短くしていったときの極限を考える。これが微分なんだ。図で言えば、曲線のある点での接線の傾きだね。

もう1つ大事な見方がある。曲線をうんと拡大すると、ほとんど直線に見える。微分とは「関数を、その点の近くで1次式（直線）で近似すること」なんだ。この見方は、変数が増えても、いちばん頼りになる考え方になるよ（第1章 No.2, 第3章 No.2）。

■ **積分：小さなものを足し合わせる** 曲線の下面積は、細い長方形に分けて足し合わせれば近似できる。分け方をどんどん細かくした極限が積分だよ。面積だけでなく、体積、道のり、質量、確率…と、「小さなものを足し合わせる」ものなら何でも積分で表せるんだ。

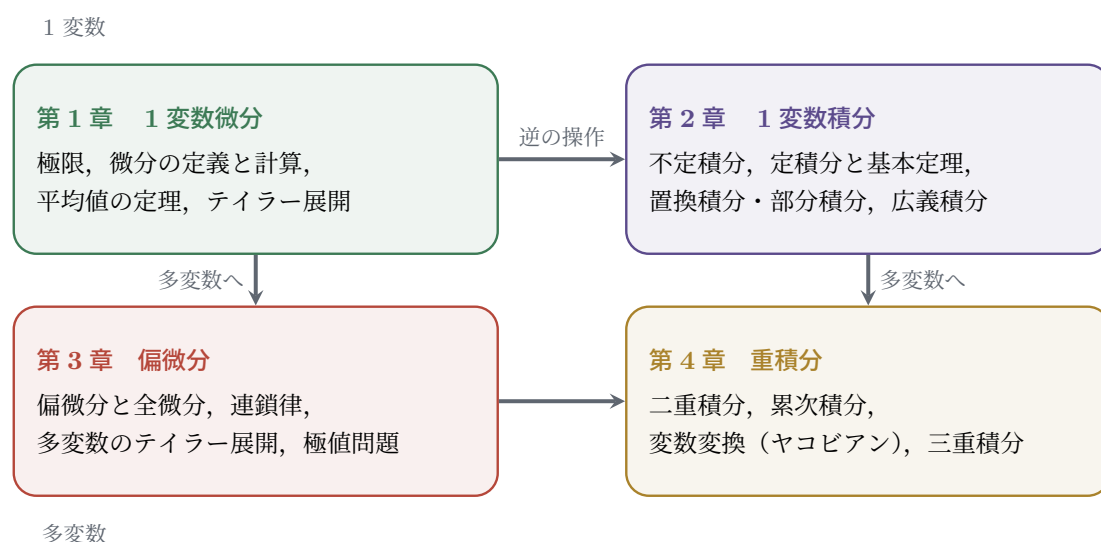
■ **そして、2つは裏表** 「瞬間の変化」と「足し合わせ」はまったく別の話に見えるけど、じつは逆の操作になっている。これが微分積分学の基本定理（第2章 No.2）で、微分積分の中でいちばん大切な定理なんだ。高校では「積分は微分の逆」と最初から教わったけど、大学では「なぜ逆になるのか」をちゃんと証明するよ。

コラム：どこで使われているの？

- **物理・工学**：位置を微分すると速度，速度を微分すると加速度．運動の法則は微分方程式で書かれる（分野「微分方程式」）．
- **経済**：「あと1個作るとどれだけ得か」（限界費用・限界効用）は微分そのもの．
- **確率・統計**：正規分布の面積を求めるのは積分．ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は第4章 No.3で証明するよ．
- **AI・機械学習**：誤差を小さくする方向を探す「勾配降下法」は，第3章の勾配ベクトルが主役．

■ 全体の地図

このプリント集は全4章，18回でできているよ．「1変数 → 多変数」「微分 → 積分」の組み合わせで，4つのブロックに分かれているんだ．



各章の中身はこんな感じ．

章	タイトル	主な内容
第1章	1変数微分	関数の極限，微分の定義，微分の計算，平均値の定理，テイラー展開
第2章	1変数積分	不定積分，定積分，置換積分と部分積分，広義積分
第3章	偏微分	多変数関数と偏微分，全微分，合成関数の偏微分，テイラー展開（多変数），極値問題
第4章	重積分	二重積分，累次積分，変数変換，三重積分

後半の第3章・第4章は，前半の考え方を「変数が増えたらどうなるか」と広げたものなんだ．たとえば，1変数の「接線」は2変数では「接平面」に，1変数の「 f'' で極値判定」は「ヘッセ行列で極値判定」に，置換積分の「 $dx = g'(t) dt$ 」は「 $dx dy = |J| du dv$ 」になる．前半との対応を意識しながら読むと，後半がぐっと分かりやすくなるよ．

ほかの分野とのつながり

- このシリーズでは、「限りなく近づく」という直感的な極限で話を進める。それをきちんと不等式で書き直す ε - δ 論法や、実数の性質にさかのぼった厳密な証明は、分野「解析学」で扱うよ。
- 第3章・第4章では、行列の積・行列式・固有値など、分野「線形代数」の道具がたくさん出てくる。線形代数を並行して学んでいると、多変数の微分積分がずっと見通しよくなるんだ。

■ プリントの読み方

どの回も、同じ形でできているよ。

- 最初の「この回のゴール」で、その回にできるようになることを確認しよう。
- 本文には、色のついた箱がいろいろ出てくる。色で役割が分かるようになっているんだ。

定義（紫）

新しい言葉の意味をきっちり決めるところ。数学は「定義」がすべての出発点なんだ。

定理（赤）

定義から証明できる、大切な性質。すぐあとに【証明】がついているよ。定理の**仮定**（「連続ならば」「微分可能ならば」など）は**太字**にしてある。仮定が1つ欠けるだけで成り立たなくなる例がたくさんあるから、必ず確認しよう。

例・例題（緑）

定義や定理が「たとえばこういうこと」と分かる具体例。例題には【解答】がついている。

注意（灰）

間違いやすいところや、計算のコツ。

コラム（金）

ちょっと寄り道。他の分野とのつながりや、背景にある考え方を紹介しているよ。読み飛ばしても大丈夫。

- 最後に**練習問題**と**解答**がある。「(考えてみよう)」がついた問題は、少し発展的なチャレンジ問題だよ。
- さらに **発展** のマークがついた問題は、その回の内容から一歩踏み出した**発展問題**。最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦しよう。
- 本文には「第2章 No.3 定理5」のように、前の回への参照がたくさん出てくる。忘れていたら、ぜひ戻って読み直してみてね。ほかの分野につながるところは「分野「線形代数」第7章 No.5」のように、分野名つきで書いてあるよ。
- 証明を省略したところは「証明は教科書に任せる」とはっきり書いてある。

■ どう学ぶか：5つのコツ

■1. 手を動かす 微分積分は計算の練習量がものを言う科目なんだ。例題は解答を見る前に自分で計算してみよう。置換積分や部分積分は、やればやるほど「どう置けばいいか」が見えるようになるよ。

■2. 図を描く 極限、接線、面積、体積…。微分積分の話は、ほとんどが図にできる。特に第4章の重積分では、積分する領域の図を必ず描くこと。積分の範囲や順序の交換は、図なしではほぼ確実に間違えるんだ。

■3. 仮定と例外を気にする 大学の微分積分には、「連続だけど微分できない」「偏微分できるのに連続でない」「順序を変えると積分の値が変わる」といった反例がたくさん出てくる。反例は「定理の仮定がなぜ必要か」を教えてくれる大切な例だよ。定理を読んだら、「この仮定がなかったらどうなる？」と考えてみよう。

■4. 1変数と多変数を見比べる 後半で新しい概念が出てきたら、「1変数だと何にあたる？」と考えてみよう。全微分は「1次近似」、ヘッセ行列は「2階微分」、ヤコビアンは「 $g'(t)$ 」。対応が見えると、覚えることがぐっと減るんだ。

■5. 分からなくても、いったん先へ進む 極限の議論や証明でつまずいても、少し先まで進んで使い方を見てから戻ってくると「あ、そういうことか！」となることがよくある。1回で全部分かろうとしなくて大丈夫。行ったり来たりしながら理解が深まっていくよ。

計算ミスを防ぐ検算のワザ

- 不定積分の答えは、微分して元に戻るか確かめる。これがいちばん確実な検算だよ。
- 極限やテイラー展開は、小さな数 ($x = 0.01$ など) を代入して電卓で値を比べてみる。
- 定積分・重積分は、答えの符号や大きさが図と合っているか（面積が負になっていないか、など）を確かめる。
- 偏微分 f_{xy} と f_{yx} は、ふつうの関数なら一致する。両方計算して比べると検算になる。

■ よく出てくる記号

最初は見慣れない記号も、使っているうちに自然に読めるようになるよ。困ったらここに帰ってきてね。

記号	意味	初登場
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	x を a に近づけたときの $f(x)$ の極限	第 1 章 No.1
$e, \log x$	ネイピア数, 自然対数 (本によっては $\ln x$)	第 1 章 No.1
$f'(x), \frac{dy}{dx}$	導関数	第 1 章 No.2
$\arcsin x, \arctan x$	逆三角関数 (本によっては $\sin^{-1} x$ など)	第 1 章 No.3
$f^{(n)}(x), C^n$ 級	第 n 次導関数, n 回微分できて連続	第 1 章 No.3
$o(x^n)$	x^n より速く 0 に近づく量 (ランダウの記号)	第 1 章 No.5
$\int f(x) dx, \int_a^b f(x) dx$	不定積分, 定積分	第 2 章 No.1, No.2
$\Gamma(s)$	ガンマ関数	第 2 章 No.4
$f_x, \frac{\partial f}{\partial x}$	x についての偏導関数	第 3 章 No.1
dz	全微分	第 3 章 No.2
∇f	勾配ベクトル ($\text{grad } f$)	第 3 章 No.2
H_f	ヘッセ行列	第 3 章 No.4
$\iint_D f dx dy, \iiint_V f dx dy dz$	二重積分, 三重積分	第 4 章 No.1, No.4
$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$	ヤコビアン	第 4 章 No.3

■ さいごに

微分積分は、「無限に小さくする」「無限に足し合わせる」という、人類が何百年もかけて手に入れた考え方なんだ。最初は極限の議論がもどかしく感じるかもしれないけど、それを乗り越えると、世界の見え方が少し変わるよ。曲がったものも、近くで見ればまっすぐ。複雑なものも、細かく分ければ足し算。

一気に全部分かろうとしなくて大丈夫。1 回分ずつ、自分のペースで進めていこう。分からないところがあるのは、ちゃんと考えている証拠だよ。

それじゃあ、第 1 章 No.1 「関数の極限」から、いっしょに始めよう！