

No.1 関数の極限

この回のゴール

- 関数の極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の意味を説明し、右極限・左極限を使って極限の有無を判定できる.
- 極限の四則演算とはさみうちの原理を使って、不定形の極限を計算できる.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ と、ネイピア数 e に関する極限を使いこなせる.
- 連続関数の定義を述べ、中間値の定理を使って方程式の解の存在を示せる.

■ 1. 関数の極限とは

微分も積分も、その土台にあるのは「限りなく近づける」という操作、つまり**極限**である. 高校数学IIIで学んだ極限を、この回で整理し直しておこう.

定義 1 関数の極限

関数 $f(x)$ について、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a)$$

と書き、 α を $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限值**という. $f(x)$ は α に**収束する**という.

ポイントは「 x は a と異なる値をとりながら」という部分である. 極限は「 a のまわりでどうなっているか」だけを見ていて、 $x = a$ での値 $f(a)$ は関係しない. $f(a)$ が定義されていなくてもよい.

例 1

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x = 1$ で定義されていない (分母が 0). しかし $x \neq 1$ なら $f(x) = x + 1$ なので

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

注意

「限りなく近づく」という言い方は直感的には分かりやすいが、数学的にはあいまいさが残る. これをきちんと定式化したものが ε - δ 論法で、分野「解析学」第 3 章 No.1 で扱う. このシリーズ (微分積分) では、直感的な定義で話を進める.

定義 2 右極限・左極限

x が a より大きい値をとりながら a に近づくときの極限を**右極限**といい、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と書く. x が a より小さい値をとりながら a に近づくときの極限を**左極限**といい、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ と書く. $a = 0$ のときは $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$ と書く.

本によっては $x \rightarrow a+$, $x \downarrow a$ などと書くこともある.

定理 1

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であることと、右極限と左極限がともに存在して α に等しいことは同値である。

例 2 右と左で食い違う例

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$) とすると、 $x > 0$ では $f(x) = 1$, $x < 0$ では $f(x) = -1$ なので

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1.$$

右極限と左極限が異なるので、定理 1 より $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

x を限りなく大きくする場合 ($x \rightarrow \infty$) や、 $f(x)$ が限りなく大きくなる場合 ($f(x) \rightarrow \infty$) も同じように考える。

定義 3 無限大と発散

- x が限りなく大きくなる時 $f(x)$ が α に近づくことを $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ と書く。 $x \rightarrow -\infty$ も同様。
- $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が限りなく大きくなることを $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ と書き、 $f(x)$ は**正の無限大に発散する**という。 $-\infty$ も同様。
- 収束しないことを**発散する**という。 $\pm\infty$ に発散する場合と、どこにも近づかない場合（振動など）がある。

例 3

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$ なので、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ は存在しない (∞ でもない)。

■ 2. 極限の性質

定理 2 極限の四則演算

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β は実数) とする。このとき

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k\alpha$ (k は定数)
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
- (4) $\beta \neq 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

$x \rightarrow \pm\infty$ や片側極限でも同じことが成り立つ。(証明は ε - δ 論法を使うので教科書に任せる。)

不定形

定理 2 は「それぞれの極限が**有限の値として存在する**」ときにしか使えない. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty$ の形になるものを**不定形**といい, 式変形 (約分・有理化・最高次の項でくくる など) をしてから極限を考える必要がある.

例題 1

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ を求めよ.

【解答】 $\infty - \infty$ の不定形なので, 分子を有理化する. $x > 0$ で考えてよいので

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow \infty).$$

定理 3 はさみうちの原理

a の近く ($x \neq a$) で $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ が成り立ち, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ ならば, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$. ($x \rightarrow \pm\infty$ でも同様.)

例題 2

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ を示せ.

【解答】 $\sin \frac{1}{x}$ 自体は $x \rightarrow 0$ で -1 と 1 の間を振動し続け, 極限をもたない (練習問題 7). しかし

$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ なので, $x \neq 0$ で

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|.$$

$|x| \rightarrow 0$ なので, はさみうちの原理より $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \rightarrow 0$, すなわち $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$.

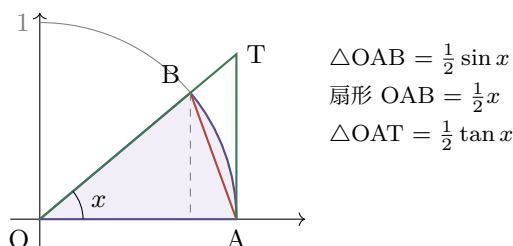
■ 3. 大切な極限

微分の計算 (No.2) で必ず使う極限を 2 種類まとめておく.

定理 4

x の単位をラジアンとすると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



【証明】 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 単位円の上に図のように点をとると, 面積について $\triangle OAB < \text{扇形 } OAB < \triangle OAT$ なので

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x.$$

各辺を $\frac{1}{2} \sin x (> 0)$ で割って逆数をとると $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. $x \rightarrow +0$ のとき $\cos x \rightarrow 1$ なので, はさみうちの原理より $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. $x < 0$ のときは $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ なので, 左極限も 1 になる. $\square$

例 4

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

次は, 指数関数・対数関数の微分で必要になる極限である.

定義 4 ネイピア数

極限

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 2.71828 \dots$$

を**ネイピア数**という. (この極限が存在することの証明は, 実数の連続性を使うので分野「解析学」第2章 No.1 に任せる.)

e を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数**といい, 大学では底を省略して $\log x$ と書く. 本によっては $\ln x$ と書く.

定理 5

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

【証明】 (1) 定義 4 で $x = \frac{1}{h}$ とおけばよい ($h \rightarrow +0$ が $x \rightarrow \infty$, $h \rightarrow -0$ が $x \rightarrow -\infty$ に対応する).

(2) $\frac{\log(1 + x)}{x} = \log(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ で, (1) と $\log$ の連続性 (第4節) より $\log e = 1$ に近づく.

(3) $t = e^x - 1$ とおくと $x = \log(1 + t)$ で, $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$. よって $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\log(1 + t)} \rightarrow 1$ ((2) の逆数). $\square$

■ 4. 連続関数

定義 5 連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことをいう. つまり (i) $f(a)$ が定義されていて, (ii) 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し, (iii) 両者が等しい. 区間 I のすべての点で連続なとき, f は I で連続であるという (区間の端では片側極限で考える).

例 5

- (1) 多項式, $\sin x$, $\cos x$, e^x は実数全体で, $\log x$ は $x > 0$ で連続である. 連続関数の和・差・積・商 (分母 $\neq 0$), 合成関数も連続である.
- (2) ガウス記号 $[x]$ (x を超えない最大の整数) は, 整数 n で右極限 n , 左極限 $n - 1$ となり, 連続でない.
- (3) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 1$ と定めると, 定理 4 より f は $x = 0$ でも連続である.

閉区間で連続な関数には, 次の 2 つの大切な性質がある. どちらもグラフを描けば当たり前に見えるが, 証明には「実数に隙間がない」という実数の連続性が必要になる (分野「解析学」第 3 章 No.2). ここでは証明は省略する.

定理 6 中間値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ とする. $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して, $f(c) = k$ となる c が $a < c < b$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する.

定理 7 最大値・最小値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ で最大値と最小値をとる.

注意

どちらの定理も「閉区間」「連続」が欠かせない. たとえば $f(x) = \frac{1}{x}$ は开区間 $(0, 1)$ で連続だが, 最大値をもたない. また定理 6 の c は「存在する」だけで, 1 つとは限らない.

例題 3

方程式 $x^3 + x - 1 = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲に実数解をもつことを示せ.

【解答】 $f(x) = x^3 + x - 1$ は多項式なので $[0, 1]$ で連続である. $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ なので, 中間値の定理 ($k = 0$) より, $f(c) = 0$ となる c が $0 < c < 1$ に存在する.

コラム：「限りなく近づく」をどう言い換えるか

「 x を a に近づけると $f(x)$ が α に近づく」を、「どんなに小さな誤差 $\varepsilon > 0$ を指定されても、 x を a に十分近く（距離 δ 以内に）とれば、 $f(x)$ と α の差を ε 未満にできる」と言い換えたものが ε - δ 論法である。「近づく」という動きを使わず、不等式だけで極限を表しているところがポイントである。大学1年の講義で最初につまずきやすいところなので、分野「解析学」第3章 No.1 でじっくり扱う。

■ 練習問題

1. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$$

2. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$$

3. $f(x) = \frac{x + |x|}{x}$ ($x \neq 0$) について、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ を求め、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が存在するか答えよ。

4. はさみうちの原理を使って、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ を示せ。

5. 関数 $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$ ($x \neq 0$)、 $f(0) = 2$ が $x = 0$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

6. 方程式 $\cos x = x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に実数解をもつことを示せ。

7. (考えてみよう) $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) とする。 $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はどちらも $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づくが、 $g(x_n)$ と $g(y_n)$ はそれぞれどうなるか。このことから、 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ が存在しないことを説明せよ。

■ 練習問題の解答

1. (1) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-1} \rightarrow \frac{4}{1} = 4.$

(2) 分子を有理化して $\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \rightarrow \frac{1}{2}.$

(3) 分母・分子を x^2 で割って $\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow 2.$

(4) 有理化して $\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} \rightarrow \frac{2}{2} = 1.$

2. (1) $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3.$

(2) $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ より $\frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \rightarrow 2.$

(3) $\frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$ (定理 5 (3) で x を $2x$ に置きかえた).

(4) $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left\{ \left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2} \right\}^2 \rightarrow e^2.$

3. $x > 0$ では $f(x) = \frac{2x}{x} = 2$, $x < 0$ では $f(x) = \frac{0}{x} = 0$. よって右極限は 2, 左極限は 0. 両者が異なるので, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない (定理 1).

4. $x > 0$ で $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ であり, $\pm \frac{1}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). はさみうちの原理より $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$.

5. $a \neq 0$ のとき $\frac{\sin ax}{x} = a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \rightarrow a$. $a = 0$ のときは $f(x) = 0$ ($x \neq 0$) で極限は 0. 連続であるためには極限が $f(0) = 2$ に等しければよいので, $a = 2$.

6. $f(x) = \cos x - x$ は $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続で, $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$. 中間値の定理より, $f(c) = 0$, すなわち $\cos c = c$ となる c が $0 < c < \frac{\pi}{2}$ に存在する.

7. $g(x_n) = \sin n\pi = 0$, $g(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. もし $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \alpha$ が存在すれば, 0 に近づくどんな x の動かし方でも $g(x)$ は α に近づくはずなので, x_n に沿えば $\alpha = 0$, y_n に沿えば $\alpha = 1$ となって矛盾する. よって極限は存在しない. (g のグラフは $x = 0$ に近づくほど激しく振動し, -1 と 1 の間を無限回往復する.)