

No.2 微分の定義

この回のゴール

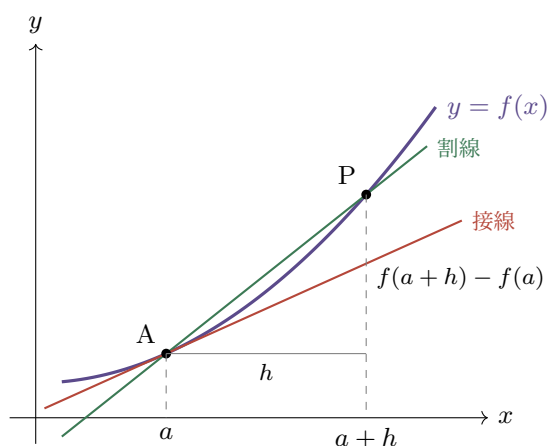
- 微分係数を極限で定義し、「接線の傾き」「瞬間の変化率」として説明できる。
- 定義にしたがって、基本的な関数の導関数を計算できる。
- 「微分可能ならば連続」を示し、その逆が成り立たない例を挙げられる。
- 微分を「1 次近似」として理解し、近似値の計算に使える。

■ 1. 微分係数

関数 $y = f(x)$ で、 x が a から $a + h$ まで変わるときの**平均変化率**は

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

である。これはグラフ上の 2 点 $A(a, f(a))$, $P(a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線（割線）の傾きである。 h を 0 に近づけると、点 P は A に近づき、割線は A での**接線**に近づいていく。



定義 1 微分係数

関数 $f(x)$ について、極限

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が（有限の値として）存在するとき、 $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるといい、 $f'(a)$ を $x = a$ における**微分係数**という。 $x = a + h$ とおけば、 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ と書ける。

$f'(a)$ は、図形的には点 $(a, f(a))$ における接線の傾き、物理的には（ x を時刻、 $f(x)$ を位置と見て）時刻 a における**瞬間の速度**を表す。

定義 2 接線

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能なとき、点 $(a, f(a))$ を通り傾き $f'(a)$ の直線

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

を、点 $(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の**接線**という。

例 1

$f(x) = x^2$ のとき、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a.$$

点 $(1, 1)$ における接線は $y = 1 + 2(x - 1)$, すなわち $y = 2x - 1$.

2. 導関数**定義 3 導関数**

$f(x)$ が区間 I のすべての点で微分可能なとき、 x に $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**という：

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

導関数を求めることを「 $f(x)$ を**微分する**」という。 $y = f(x)$ の導関数は次のようにも書く。

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x).$$

$\frac{dy}{dx}$ は**ライプニッツの記法**と呼ばれ、「 y の変化 Δy を x の変化 Δx で割ったもの $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限」という気持ちを表している。分数ではないが、分数のように扱える場面が多く (No.3), とても便利な記法である。

例題 1

定義にしたがって、 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ。

【解答】 分子を有理化する。

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (h \rightarrow 0).$$

よって $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

例題 2

定義にしたがって、 $(\sin x)' = \cos x$ を示せ。

【解答】 和積の公式 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ を使うと

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

$h \rightarrow 0$ のとき, $\cos$ の連続性より第 1 因子は $\cos x$ に, No.1 定理 4 より第 2 因子は 1 に近づく. よって $(\sin x)' = \cos x$.

同じようにして, 基本的な関数の導関数が得られる.

定理 1 基本的な関数の導関数

- (1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n は自然数), $(c)' = 0$ (c は定数)
- (2) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
- (3) $(e^x)' = e^x$
- (4) $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)

【証明】(1) 二項定理より $(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + (h^2 \text{ 以上の項})$ なので, h で割って $h \rightarrow 0$ とすれば nx^{n-1} .

(2) $\sin x$ は例題 2. $\cos x$ は練習問題 2.

(3) $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^x \cdot 1$ (No.1 定理 5 (3)).

(4) $\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \rightarrow \frac{1}{x} \cdot 1$ (No.1 定理 5 (2) で $\frac{h}{x}$ を変数と見る). □

注意

(3) の $(e^x)' = e^x$ は「微分しても変わらない関数」であり, e という数はまさにこの性質をもつように選ばれている. a^x や $\log_a x$ の導関数は No.3 で扱う. 三角関数の微分では, 角の単位は必ずラジアンである (No.1 定理 4 がラジアンで成り立つため).

■ 3. 微分可能性と連続性

定理 2

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $f(x)$ は $x = a$ で連続である.

【証明】 $h \neq 0$ のとき

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \rightarrow f'(a) \cdot 0 = 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

よって $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ となり, f は $x = a$ で連続である. □

逆は成り立たない. グラフが「とがっている」点や「垂直に立っている」点では, 連続でも微分できない.

例 2 連続だが微分可能でない例

(1) $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続だが,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - 0}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - 0}{h} = -1$$

で右と左の極限が一致しないので, $x = 0$ で微分可能でない. グラフは原点でとがっている.

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ は $x = 0$ で連続だが, $\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \rightarrow \infty$ なので微分可能でない. グラフは原点で y 軸に接している (接線が垂直).

(1) の2つの極限を、それぞれ $x = 0$ における**右微分係数**、**左微分係数**という。微分可能であることは、右微分係数と左微分係数がともに存在して等しいことと同値である (No.1 定理1)。

■ 4. 1次近似としての微分

h が小さいとき、 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx f'(a)$ なので

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

が成り立つ。右辺は接線の式で $x = a+h$ としたものであり、「 a の近くでは、グラフは接線とほとんど同じ」ということを表している。この見方をきちんと述べたのが次の定理である。

定理 3 1次近似

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるための必要十分条件は、ある定数 A と、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ を満たす関数 $\varepsilon(h)$ を使って

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \varepsilon(h)h$$

と書けることである。このとき $A = f'(a)$ である。

【証明】微分可能なら、 $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ ($h \neq 0$)、 $\varepsilon(0) = 0$ とおけば、 $A = f'(a)$ として式が成り立ち、 $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ 。逆に式が成り立てば、 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \varepsilon(h) \rightarrow A$ なので微分可能で $f'(a) = A$ 。□

誤差の項 $\varepsilon(h)h$ は「 h よりもずっと速く 0 に近づく量」である。本によってはこれを**ランダウの記号**で $o(h)$ と書く (No.5 でも使う)。

例 3

- (1) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $h = 0.02$ とすると、 $f'(1) = \frac{1}{2}$ より $\sqrt{1.02} \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.02 = 1.01$ 。(実際は $1.00995 \dots$)
- (2) $f(x) = \sin x$, $a = 0$ とすると、 h が小さいとき $\sin h \approx h$ 。

コラム：1次近似は多変数でも主役になる

定理3の「 $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ (誤差は h より速く 0 に近づく)」という形は、変数が2つ以上ある関数にもそのまま拡張できる。それが第3章 No.2 の**全微分**である。1変数のときは「微分可能 = 1次近似できる」がほぼ当たり前に見えるが、多変数では「偏微分できる」だけでは1次近似できるとは限らず、この見方が本当に大切になる。

■ 練習問題

1. 定義にしたがって、次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) f(x) = x^3 \quad (2) f(x) = \frac{1}{x} \quad (3) f(x) = x^2 - 3x$$

2. 定義にしたがって、 $(\cos x)' = -\sin x$ を示せ.

3. 次の曲線の、指定された点における接線の方程式を求めよ.

$$(1) y = e^x \quad (x = 0) \quad (2) y = \log x \quad (x = e) \quad (3) y = \sqrt{x} \quad (x = 4)$$

4. $f(x) = x|x|$ は $x = 0$ で微分可能か. 微分可能ならば $f'(0)$ を求めよ.

5. 関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases}$ が $x = 1$ で微分可能となるように、定数 a, b の値を定めよ.

6. 1 次近似を使って、次の値の近似値を求めよ.

$$(1) \sqrt{4.04} \quad (2) e^{0.02}$$

7. (考えてみよう) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能なとき、次の極限を $f'(a)$ を用いて表せ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a - h)}{h}$$

■ 練習問題の解答

1. (1) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \rightarrow 3x^2.$

(2) $\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$

(3) $\frac{\{(x+h)^2 - 3(x+h)\} - (x^2 - 3x)}{h} = 2x + h - 3 \rightarrow 2x - 3.$

2. 和積の公式 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ より

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

3. (1) $y' = e^x$ より傾き 1, 点 $(0, 1)$. $y = x + 1.$

(2) $y' = \frac{1}{x}$ より傾き $\frac{1}{e}$, 点 $(e, 1)$. $y = 1 + \frac{1}{e}(x - e)$, すなわち $y = \frac{x}{e}.$

(3) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ より傾き $\frac{1}{4}$, 点 $(4, 2)$. $y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$, すなわち $y = \frac{1}{4}x + 1.$

4. $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \rightarrow 0.$ よって微分可能で $f'(0) = 0$. ($|x|$ は $x = 0$ で微分できないが, x を掛けると「とがり」がならされて微分できるようになる.)

5. まず微分可能なら連続 (定理 2) なので, $\lim_{x \rightarrow 1+0} (ax+b) = f(1) = 1$ より $a+b=1$. このとき, 左微分係

数は $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (2+h) = 2$, 右微分係数は $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{a(1+h) + b - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{ah}{h} = a$.
両者が等しいことから $a=2$, よって $b=-1$.

6. (1) $f(x) = \sqrt{x}$, $a=4$, $h=0.04$. $f'(4) = \frac{1}{4}$ より $\sqrt{4.04} \approx 2 + \frac{1}{4} \times 0.04 = 2.01$. (実際は $2.00997 \dots$)

(2) $f(x) = e^x$, $a=0$, $h=0.02$. $e^{0.02} \approx 1 + 0.02 = 1.02$. (実際は $1.02020 \dots$)

7. $f(a)$ を引いて足すと

$$\frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} = 2 \cdot \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \rightarrow 2f'(a) + f'(a) = 3f'(a).$$

($2h$ や $-h$ も 0 に近づくと, それぞれ微分係数の定義の形になる.)