

No.3 微分の計算

この回のゴール

- 和・差・積・商の微分公式と合成関数の微分を使って、いろいろな関数を微分できる.
- 対数微分法を使って、 x^x のような関数を微分できる.
- 逆三角関数を定義し、その導関数を逆関数の微分から導ける.
- 高次導関数を求め、ライプニッツの公式を使える.

■ 1. 微分の基本公式

No.2 では定義から 1 つずつ導関数を求めた. 実際の計算では、次の公式を組み合わせで微分する.

定理 1 和・差・積・商の微分

$f(x)$, $g(x)$ が微分可能なとき,

- (1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$, $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ (k は定数)
- (2) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (3) $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ ($g(x) \neq 0$), 特に $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

【証明】(2) だけ示す. $f(x+h)$ をはさむように変形すると

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x).$$

f は微分可能なので連続 (No.2 定理 2) であり, $f(x+h) \rightarrow f(x)$. よって $h \rightarrow 0$ で $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ に近づく. $\square$

例 1

$$(1) (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(2) n \text{ を自然数とすると, } (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}. \text{ よって } (x^n)' = nx^{n-1} \text{ は負の整数 } n \text{ でも成り立つ.}$$

■ 2. 合成関数の微分

定理 2 合成関数の微分 (連鎖律)

$u = g(x)$ が x で微分可能, $y = f(u)$ が $u = g(x)$ で微分可能ならば, 合成関数 $y = f(g(x))$ も x で微分可能で

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x), \quad \text{すなわち} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

【証明】 No.2 定理 3 (1 次近似) を使う. $u = g(x)$ とおき, $k = g(x+h) - g(x)$ とすると

$$k = g'(x)h + \varepsilon_1(h)h, \quad f(u+k) - f(u) = f'(u)k + \varepsilon_2(k)k$$

($\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(0) = 0$) と書ける. 2 つ目の式に 1 つ目を代入すると

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \{f'(u) + \varepsilon_2(k)\}\{g'(x) + \varepsilon_1(h)\}.$$

$h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ (g の連続性) なので $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$ であり, 右辺は $f'(u)g'(x)$ に近づく. □

注意

「 $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ で du が約分されて $\frac{dy}{dx}$ 」と覚えてよいが, これは記号がうまくできているということで, 本当に約分しているわけではない. 単純に $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ として証明しようとする, $\Delta u = 0$ となる場合に困る. 上の証明はそれを避けるために 1 次近似を使っている.

例 2

$$(1) \{(x^2 + 1)^5\}' = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4.$$

$$(2) \{\sin(3x^2)\}' = \cos(3x^2) \cdot 6x = 6x \cos(3x^2).$$

$$(3) (\log |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \quad x < 0 \text{ では } \log |x| = \log(-x) \text{ で, } \{\log(-x)\}' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

定理 3

$a > 0$, α を実数の定数とする.

$$(1) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0) \quad (2) (a^x)' = a^x \log a \quad (3) (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \quad (x > 0, a \neq 1)$$

【証明】 (1) $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ なので, $(x^\alpha)' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$(2) a^x = e^{x \log a} \text{ なので, } (a^x)' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a.$$

$$(3) \log_a x = \frac{\log x}{\log a} \text{ (底の変換) を微分すればよい.} \quad \square$$

例題 1 対数微分法

$y = x^x$ ($x > 0$) を微分せよ.

【解答】 x^x は「 x^α 型」でも「 a^x 型」でもない, 両辺の対数をとる. $\log y = x \log x$. 両辺を x で微分すると, 左辺は合成関数の微分で $\frac{y'}{y}$ となるので

$$\frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1, \quad \text{よって} \quad y' = x^x (\log x + 1).$$

■ 3. 逆関数の微分と逆三角関数

定理 4 逆関数の微分

$f(x)$ が区間 I で微分可能かつ狭義単調（つねに増加またはつねに減少）で、 $f'(x) \neq 0$ とする。このとき逆関数 $x = g(y)$ も微分可能で

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

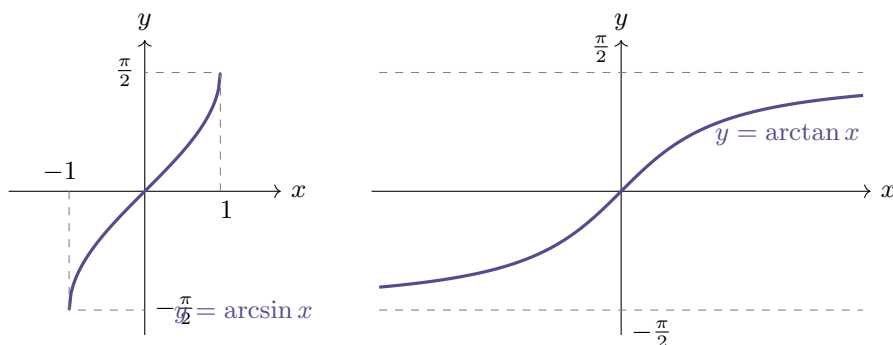
【証明】 g が微分可能であることの証明は教科書に任せる。それを認めれば、 $f(g(y)) = y$ の両辺を y で微分して、定理 2 より $f'(g(y))g'(y) = 1$ 。 $f' \neq 0$ なので $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ 。 □

この定理のいちばん大切な使い道が**逆三角関数**である。 $\sin x$ は実数全体では単調でないので、そのままでは逆関数をもたない。そこで、単調になる範囲に制限してから逆関数を考える。

定義 1 逆三角関数

- $\sin x$ を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限した関数の逆関数を $\arcsin x$ と書く。
定義域は $-1 \leq x \leq 1$, 値域は $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$.
- $\cos x$ を $0 \leq x \leq \pi$ に制限した関数の逆関数を $\arccos x$ と書く。
定義域は $-1 \leq x \leq 1$, 値域は $0 \leq \arccos x \leq \pi$.
- $\tan x$ を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限した関数の逆関数を $\arctan x$ と書く。
定義域は実数全体, 値域は $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

つまり $y = \arcsin x$ は「 $\sin y = x$ となる y を、 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ の中から選んだもの」である。本によっては $\text{Sin}^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ などと書く。 $\sin^{-1}x$ は $\frac{1}{\sin x}$ とまったく別物なので注意しよう。



例 3

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

たとえば $\sin y = \frac{1}{2}$ となる y は $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$ と無数にあるが、 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ にあるのは $\frac{\pi}{6}$ だけである。

定理 5 逆三角関数の導関数

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \\
 (2) \quad (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \\
 (3) \quad (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

【証明】(1) $y = \arcsin x$ とおくと $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. $\frac{dx}{dy} = \cos y$ で, この範囲では $\cos y > 0$ なので $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. 定理 4 より $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) は練習問題 3.

(3) $y = \arctan x$ とおくと $x = \tan y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$. よって $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. $\square$

注意

(1) の証明で $\cos y = +\sqrt{1-x^2}$ と符号を決められたのは, y の範囲を $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ に制限したおかげである. $\arcsin x$ の値域を覚えていないと, ここで符号を間違える. なお, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ や $\frac{1}{1+x^2}$ は代数的な式なのに, その「原始関数」は逆三角関数になる. これは第 2 章 No.1 の不定積分で活躍する.

■ 4. 高次導関数

定義 2 高次導関数

$f'(x)$ がさらに微分可能なとき, その導関数を第 2 次導関数といい $f''(x)$ と書く. 一般に $f(x)$ を n 回微分したものを第 n 次導関数といい,

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

などと書く ($f^{(0)}(x) = f(x)$ とする). $f(x)$ が n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき, f は C^n 級であるという. 何回でも微分可能なとき C^∞ 級であるという.

例 4

n を自然数とする.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (e^x)^{(n)} &= e^x. \\
 (2) \quad (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (1 \text{ 回微分するごとに } \frac{\pi}{2} \text{ 進む: } (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).) \\
 (3) \quad \{\log(1+x)\}^{(n)} &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x > -1). \\
 (4) \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (x \neq 1).
 \end{aligned}$$

(3), (4) は何回か微分して規則を見つけ, 数学的帰納法で確かめる. これらは No.5 のテイラー展開で使う.

積 fg の n 次導関数には、二項定理とそっくりな公式がある。

定理 6 ライプニッツの公式

f, g が n 回微分可能ならば

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = f^{(0)} g^{(n)} + \binom{n}{1} f^{(1)} g^{(n-1)} + \binom{n}{2} f^{(2)} g^{(n-2)} + \cdots + f^{(n)} g^{(0)}.$$

ここで $\binom{n}{k} = {}_n C_k$ は二項係数である。

【証明】 n についての数学的帰納法。積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を繰り返すと、「 f を何回、 g を何回微分した項がいくつ出るか」の数が、 $(a+b)^n$ を展開したときの $a^k b^{n-k}$ の係数の数え方とまったく同じになる ($\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ を使う)。詳しくは教科書に任せる。□

例題 2

$(x^2 e^x)^{(n)}$ を求めよ ($n \geq 2$)。

【解答】 $f = x^2$, $g = e^x$ とすると, $f' = 2x$, $f'' = 2$, $f^{(k)} = 0$ ($k \geq 3$), $g^{(k)} = e^x$. ライプニッツの公式で $k = 0, 1, 2$ の項だけが残るので

$$(x^2 e^x)^{(n)} = x^2 e^x + n \cdot 2x e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 e^x = e^x \{x^2 + 2nx + n(n-1)\}.$$

コラム：ライプニッツの記法は「分数のようにふるまう」

定理 2 の $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ や、定理 4 の $\frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx}$ のように、ライプニッツの記法は分数と同じ規則で計算できるように作られている。この「分数のようにふるまう」性質は、第 2 章 No.3 の置換積分 ($dx = g'(t) dt$) や、分野「微分方程式」第 2 章 No.1 の変数分離形 ($\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ を $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$ と書きかえる) でも大活躍する。

■ 練習問題

1. 次の関数を微分せよ.

$$(1) x^2 \sin x \quad (2) \frac{x-1}{x^2+1} \quad (3) e^{-x^2} \quad (4) \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$(5) \arctan \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (6) \arcsin \frac{x}{2} \quad (|x| < 2) \quad (7) x^{\sin x} \quad (x > 0)$$

2. 次の値を求めよ.

$$(1) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (2) \arccos 0 \quad (3) \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4) \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 定理 5 の証明にならって, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$ を示せ.

4. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$(1) xe^x \quad (2) \frac{1}{1+x} \quad (3) \cos x$$

5. $f(x) = x^2 e^x$ について, $f^{(10)}(0)$ を求めよ.

6. $y = \arctan x$ は, $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ を満たすことを示せ.

7. (考えてみよう) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$, $f(0) = 0$ とする.

(a) f は $x = 0$ で微分可能で, $f'(0) = 0$ であることを示せ.

(b) $x \neq 0$ における $f'(x)$ を求め, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(つまり f は実数全体で微分可能だが, C^1 級ではない.)

■ 練習問題の解答

1. (1) $2x \sin x + x^2 \cos x$.

(2) $\frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$.

(3) $-2xe^{-x^2}$.

(4) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(5) $\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2 + 1}$. ($\arctan x$ の導関数の -1 倍になる. No.4 で再び登場する.)

(6) $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

(7) $y = x^{\sin x}$ の対数をとって $\log y = \sin x \log x$. 微分して $\frac{y'}{y} = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$. よって

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

2. (1) $-\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

3. $y = \arccos x$ とおくと $x = \cos y$, $0 < y < \pi$. $\frac{dx}{dy} = -\sin y$ で, この範囲では $\sin y > 0$ なので $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$. よって $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4. (1) ライプニッツの公式 ($f = x, g = e^x$) で $k = 0, 1$ の項だけ残り, $(xe^x)^{(n)} = xe^x + ne^x = (x+n)e^x$.
(2) $(1+x)^{-1}$ を順に微分すると $-(1+x)^{-2}$, $2(1+x)^{-3}$, $-3!(1+x)^{-4}$, ... なので (帰納法で確かめられる)

$$\left(\frac{1}{1+x} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

(3) 例 4 (2) より $\cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$.

5. 例題 2 より $f^{(n)}(x) = e^x \{x^2 + 2nx + n(n-1)\}$. $n = 10$, $x = 0$ を代入して $f^{(10)}(0) = 10 \times 9 = 90$.

6. $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. よって $(1+x^2)y'' = -\frac{2x}{1+x^2} = -2xy'$, すなわち $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$.

7. (a) $\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h| \rightarrow 0$ (はさみうちの原理, No.1 例題 2). よって $f'(0) = 0$.

(b) $x \neq 0$ では積の微分と合成関数の微分より

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

$x \rightarrow 0$ のとき第 1 項は 0 に近づくが, 第 2 項 $\cos \frac{1}{x}$ は -1 と 1 の間を振動して極限をもたない (No.1 練習問題 7 と同様). よって $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ は存在せず, f' は $x = 0$ で連続でない.