

No.4 平均値の定理

この回のゴール

- ロルの定理と平均値の定理を述べ、その図形的な意味を説明できる。
- 平均値の定理を使って、「 $f' = 0$ なら定数」「 $f' > 0$ なら増加」を示し、不等式の証明に応用できる。
- コーシーの平均値の定理からロピタルの定理を導き、不定形の極限を計算できる。

■ 1. 極値とロルの定理

定義 1 極大・極小

$f(x)$ が $x = c$ で極大であるとは、 c を含む十分小さな开区間をとると、その区間内のすべての x に対して $f(x) \leq f(c)$ となることをいう。 $f(c)$ を極大値という。不等号の向きを逆にしたものが極小・極小値で、両者をあわせて極値という。

定義1では等号を許しているので、定数関数はすべての点で極大かつ極小になる。等号を許さず、「 $x \neq c$ なら $f(x) < f(c)$ 」となるときは狭義の極大（真の極大）という。狭義の極小も同様である。本によっては、狭義のほうを「極大」と呼ぶこともあるので、教科書の定義を確認しよう。グラフの「山の頂上」が1点ではなく平らな部分になっている場合でも極大と言えるようにしておくと、次のロルの定理の証明がすっきりする。

定理 1

$f(x)$ が $x = c$ で極値をとり、 $x = c$ で微分可能ならば、 $f'(c) = 0$ 。

【証明】極大の場合を示す。 c の近くでは $f(c+h) - f(c) \leq 0$ なので、

$$h > 0 \text{ のとき } \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad h < 0 \text{ のとき } \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

$h \rightarrow +0$ とすると $f'(c) \leq 0$, $h \rightarrow -0$ とすると $f'(c) \geq 0$. よって $f'(c) = 0$. □

注意

逆は成り立たない。 $f(x) = x^3$ は $f'(0) = 0$ だが、 $x = 0$ で極値をとらない。「 $f'(c) = 0$ 」は極値であるための必要条件にすぎない。

定理 2 ロルの定理

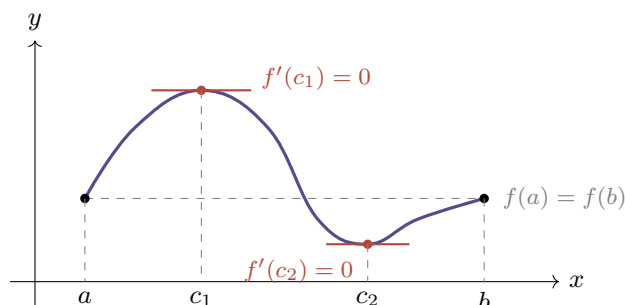
$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能で、 $f(a) = f(b)$ ならば、

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

を満たす c が存在する。

【証明】 f が定数関数なら、どの c でも $f'(c) = 0$ 。定数関数でないとき、No.1 定理7（最大値・最小値の

定理) より f は $[a, b]$ で最大値と最小値をとる. $f(a) = f(b)$ なので, 最大値と最小値の少なくとも一方は, 端点 a, b 以外の点 c ($a < c < b$) でとる. たとえば最大値を c でとるとすると, $[a, b]$ のすべての x で $f(x) \leq f(c)$ である. c は开区間 (a, b) の点なので, c を含む小さな开区間を (a, b) の中にとれて, そこでも $f(x) \leq f(c)$. つまり f は $x = c$ で (定義1の意味で) 極大である. f は c で微分可能なので, 定理1より $f'(c) = 0$. 最小値の場合も同様. $\square$



図のように, 両端の高さが等しければ, 間のどこかに「山の頂上」(c_1 , 最大)か「谷の底」(c_2 , 最小)があって, そこで接線が水平になる. この例のように, c は1つとは限らない.

■ 2. 平均値の定理

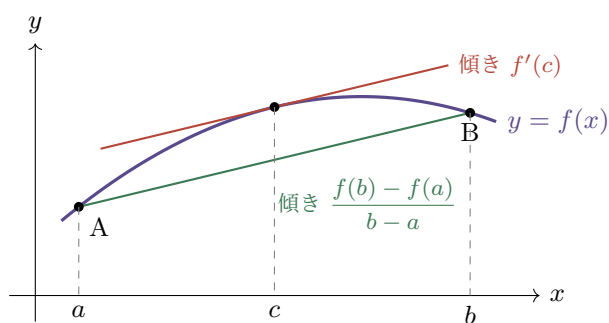
ロルの定理のグラフを「傾ける」と, 次の定理になる.

定理 3 平均値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能ならば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$

を満たす c が存在する.



図形的には, 「グラフ上の2点 A, B を結ぶ線分と平行な接線が, A と B の間のどこかで引ける」ということである. 物理的には, 「平均の速さが時速 60 km なら, どこかの瞬間には必ず時速 60 km で走っている」ということになる.

【証明】 直線 AB の式 $\ell(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ を f から引いた関数 $g(x) = f(x) - \ell(x)$ を考える. g は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能で, $g(a) = g(b) = 0$. ロルの定理より $g'(c) = 0$ となる c ($a < c < b$) があり, $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ なので結論を得る. $\square$

$b = a + h$ とおくと, c は a と $a + h$ の間にあるので $c = a + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) と書ける. 平均値の定理

は次の形でもよく使われる ($h < 0$ でもよい).

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h, \quad 0 < \theta < 1.$$

No.2 の1次近似 $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ と比べると, 「 $f'(a)$ を $f'(a+\theta h)$ に変えれば, 近似ではなく等式になる」と読める. この見方は No.5 のテイラーの定理につながる.

例 1

$$f(x) = x^2, [a, b] = [0, 2] \text{ のとき, } \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2 = f'(c) = 2c \text{ より } c = 1.$$

注意

- 平均値の定理は c が「存在する」ことしか言っていない. c は1つとは限らず, 具体的な値が分からないことも多い. それでも十分役に立つのが, この定理のすごいところである.
- 仮定は省けない. $f(x) = |x|$ を $[-1, 1]$ で考えると, $\frac{f(1) - f(-1)}{2} = 0$ だが, $f'(c) = 0$ となる c はない ($x = 0$ で微分可能でないため).

■ 3. 平均値の定理の応用

定理 4

$f(x)$ が区間 I で微分可能とする.

- (1) I でつねに $f'(x) = 0$ ならば, $f(x)$ は I で定数である.
- (2) I でつねに $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は I で狭義単調増加である. ($f'(x) < 0$ なら狭義単調減少.)

【証明】 I の任意の2点 $x_1 < x_2$ をとる. 平均値の定理より, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ となる c ($x_1 < c < x_2$) がある. (1) では $f'(c) = 0$ なので $f(x_1) = f(x_2)$. (2) では $f'(c) > 0$ なので $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

高校では「 $f' > 0$ なら増加」を当然のこととして使っていたが, その根拠は平均値の定理だったのである.

例 2

$f(x) = \arcsin x + \arccos x$ ($-1 < x < 1$) とすると, No.3 定理5より $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. よって f は定数で, $f(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$ より $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. ($x = \pm 1$ でも, 直接代入すれば成り立つことが確かめられる.)

「区間」が大切

$g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) は, No.3 練習問題1(5)より $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ である. しかし $g(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$ で, 定数ではない. 定義域 $x \neq 0$ は1つの区間ではなく, $x > 0$ と $x < 0$ の2つに分かれているからである. 定理4から言えるのは「それぞれの区間の上で定数」ということだけである.

例題 1

$x > 0$ のとき, $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ が成り立つことを示せ.

【解答】 $f(t) = \log(1+t)$ に $[0, x]$ で平均値の定理を使うと, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ なので

$$\log(1+x) - \log 1 = \frac{1}{1+c} \cdot x, \quad 0 < c < x$$

となる c がある. $0 < c < x$ より $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$ なので, 各辺に $x (> 0)$ を掛けて $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$.

例題 2

すべての実数 a, b について, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ を示せ.

【解答】 $a = b$ なら明らか. $a \neq b$ のとき, 平均値の定理より $\sin a - \sin b = \cos c \cdot (a - b)$ となる c (a と b の間) がある. $|\cos c| \leq 1$ なので $|\sin a - \sin b| = |\cos c| |a - b| \leq |a - b|$.

■ 4. コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

定理 5 コーシーの平均値の定理

$f(x), g(x)$ が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能で, (a, b) でつねに $g'(x) \neq 0$ ならば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b$$

を満たす c が存在する. ($g(x) = x$ とすれば平均値の定理になる.)

【証明】 まず $g(b) \neq g(a)$ である (もし等しければ, ロルの定理より $g'(c) = 0$ となる c があり, 仮定に反する).

$$h(x) = \{f(b) - f(a)\}\{g(x) - g(a)\} - \{g(b) - g(a)\}\{f(x) - f(a)\}$$

とおくと, $h(a) = h(b) = 0$. ロルの定理より $h'(c) = \{f(b) - f(a)\}g'(c) - \{g(b) - g(a)\}f'(c) = 0$ となる c がある. $g'(c) \neq 0, g(b) - g(a) \neq 0$ で割ればよい. $\square$

注意

f と g に別々に平均値の定理を使うと, $f(b) - f(a) = f'(c_1)(b - a)$, $g(b) - g(a) = g'(c_2)(b - a)$ となるが, c_1 と c_2 は一般に異なる. 同じ c でそろえられるところが, コーシーの平均値の定理の価値である.

定理 6 ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ は a の近く ($x = a$ を除いてよい) で微分可能で, $g'(x) \neq 0$ とする. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ であり, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が存在する ($L = \pm\infty$ でもよい) ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形や, $x \rightarrow \pm\infty$, 片側極限でも同じことが成り立つ (これらの証明は省略する).

【証明】 $\frac{0}{0}$ 型で $x \rightarrow a+0$ の場合を示す. $f(a) = g(a) = 0$ と定めれば, f, g は $[a, x]$ で連続になる. コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < x$$

となる c がある. $x \rightarrow a+0$ のとき $c \rightarrow a+0$ なので, 右辺は L に近づく. $x \rightarrow a-0$ も同様. $\square$

例題 3

次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} x \log x$$

【解答】 (1) $\frac{0}{0}$ 型. ロピタルの定理を 3 回続けて使う (右側の極限が存在すれば左側も存在する, という順に読む).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

(2 つ目の極限は No.1 例 4 (2) を使って直接 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ としてもよい.)

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 型. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$. 同様に, どんな自然数 n についても $\frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0$ である (指数関数はどんな多項式よりも速く大きくなる).

(3) $0 \times (-\infty)$ 型なので, 分数の形に直す. $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$.

ロピタルの定理の落とし穴

- 使う前に, 本当に $\frac{0}{0}$ や $\frac{\infty}{\infty}$ の形かを必ず確かめる. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x+1} = 1$ に無理やり使うと $\frac{-\sin x}{1} \rightarrow 0$ となり, 誤った答えになる.
- $\frac{f'}{g'}$ の極限が存在しないときは, 何も言えない. たとえば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$ だが, $\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x$ は振動して極限をもたない.

コラム：平均値の定理は「実数の連続性」の上に立っている

この回の証明は、ロルの定理 ← 最大値・最小値の定理 ← 実数の連続性、とさかのぼることができる。もし数直線に「隙間」があったら、平均値の定理は成り立たない。たとえば有理数だけの世界で $f(x) = x^3$ を $[0, 1]$ で考えると、 $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 = 3c^2$ を満たす c は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ で、これは有理数ではないから「存在しない」ことになってしまう。このように土台から積み上げ直すのが分野「解析学」で、平均値の定理は分野「解析学」第4章 No.2 で厳密に扱う。

■ 練習問題

発展 のついた問題は、この回の内容から一步踏み出した発展問題である。最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい。

1. 次の関数と区間について、平均値の定理の c を求めよ。

$$(1) f(x) = x^3, [0, 3] \quad (2) f(x) = \sqrt{x}, [1, 4]$$

2. 平均値の定理を使って、 $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ であることを示せ。

3. すべての実数 a, b について、 $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ を示せ。

4. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +0} x^x \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

5. 実数全体で微分可能な関数 $f(x)$ が、すべての x で $f'(x) = f(x)$ 、および $f(0) = 1$ を満たすとする。 $g(x) = f(x)e^{-x}$ を考えることで、 $f(x) = e^x$ であることを示せ。

6. 方程式 $x^3 + x - 1 = 0$ は、ちょうど1つの実数解をもつことを示せ。(存在は No.1 例題3で示した。)

7. **発展** (考えてみよう) 平均値の定理 $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$ ($0 < \theta < 1$) の θ について考える。

(a) $f(x) = x^2$ のとき、 a, h によらず $\theta = \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(b) $f(x) = x^3$, $a = 0$ のとき、 θ を求めよ。

(c) $f(x) = x^3$, $a \neq 0$ のとき、 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ であることを示せ。

■ 練習問題の解答

1. (1) $\frac{27-0}{3} = 9 = 3c^2$, $0 < c < 3$ より $c = \sqrt{3}$.
 (2) $\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ より $\sqrt{c} = \frac{3}{2}$, $c = \frac{9}{4}$ ($1 < c < 4$ を満たす).
2. e^t に $[0, x]$ で平均値の定理を使うと, $e^x - 1 = e^c x$ ($0 < c < x$). $e^c > 1$, $x > 0$ なので $e^x - 1 > x$.
3. $a \neq b$ のとき, $\arctan a - \arctan b = \frac{1}{1+c^2}(a-b)$ (c は a と b の間). $0 < \frac{1}{1+c^2} \leq 1$ より $|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$. $a = b$ なら明らか.
4. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$ ($\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ と No.1 例 4 (1) を使った).
 (3) $\frac{\infty}{\infty}$ 型. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{1} = 0$.
 (4) $x^x = e^{x \log x}$ で, 例題 3 (3) より $x \log x \rightarrow 0$. e^t の連続性より $x^x \rightarrow e^0 = 1$.
 (5) 通分すると $\frac{\sin x - x}{x \sin x}$ ($\frac{0}{0}$ 型). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$.
5. $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = \{f'(x) - f(x)\}e^{-x} = 0$. 定理 4 より g は定数で, $g(0) = f(0) = 1$. よって $f(x)e^{-x} = 1$, すなわち $f(x) = e^x$. (「微分しても変わらない関数」は, 定数倍を除けば e^x しかない. 分野「微分方程式」第2章 No.1 の変数分離形の考え方につながる.)
6. $f(x) = x^3 + x - 1$ とすると $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ なので, 定理 4 より f は狭義単調増加. よって $f(x) = 0$ となる x は高々1つ. No.1 例題 3 より少なくとも1つあるので, ちょうど1つ.
7. (a) $(a+h)^2 - a^2 = 2ah + h^2$, $f'(a+\theta h)h = 2(a+\theta h)h = 2ah + 2\theta h^2$. 比べて $2\theta = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$.
 (b) $h^3 = 3(\theta h)^2 h = 3\theta^2 h^3$ より $\theta^2 = \frac{1}{3}$, $0 < \theta < 1$ より $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 (c) $(a+h)^3 - a^3 = 3(a+\theta h)^2 h$ を展開して h で割ると, $3a^2 + 3ah + h^2 = 3a^2 + 6a\theta h + 3\theta^2 h^2$. さらに h で割って整理すると $\theta = \frac{1}{2} + \frac{h(1-3\theta^2)}{6a}$. $0 < \theta < 1$ より $|1-3\theta^2| < 3$ なので, 第2項は $h \rightarrow 0$ で0に近づく. よって $\theta \rightarrow \frac{1}{2}$.