

No.5 テイラー展開

この回のゴール

- テイラーの定理（剰余項つき）を述べ、平均値の定理の一般化として理解できる.
- e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ のマクローリン展開を書ける.
- テイラーの定理を使って、近似値とその誤差を評価できる.
- テイラー展開を使って極限を計算し、2 次導関数による極値の判定ができる.

■ 1. 1 次近似から n 次近似へ

No.2 では、 $x = a$ の近くで関数を接線（1 次式）で近似した： $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. これは「 $x = a$ での値」と「 $x = a$ での傾き（1 次導関数）」が f と一致する 1 次式である. もっと精度を上げるには、2 次導関数、3 次導関数、... まで一致する多項式を使えばよい.

$x = a$ のまわりの n 次式 $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$ を k 回微分して $x = a$ を代入すると、 $(x-a)^k$ の項以外はすべて消えて $p^{(k)}(a) = k! c_k$ となる. したがって $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とするには、 $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ とすればよい.

定義 1 テイラー多項式

$f(x)$ が $x = a$ で n 回微分可能なとき、

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

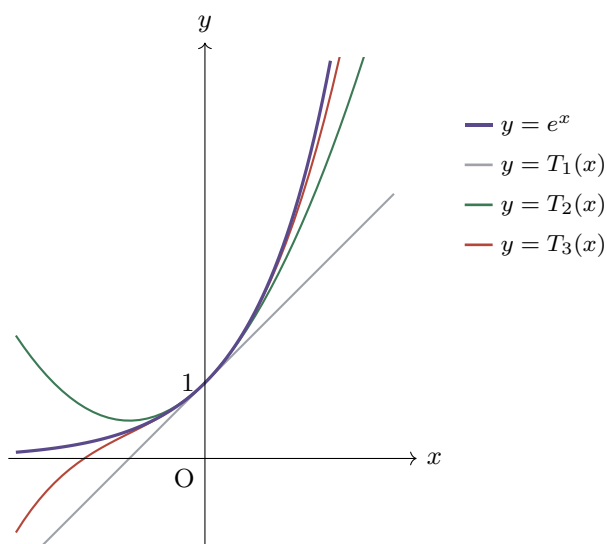
を、 $f(x)$ の $x = a$ における n 次テイラー多項式という. $a = 0$ のときはマクローリン多項式ともいう.

例 1

$f(x) = e^x$, $a = 0$ とすると、 $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ なので

$$T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

次数を上げるほど、 $x = 0$ から離れたところまで e^x のグラフに寄り添うようになる.



■ 2. テイラーの定理

近似したときの誤差 $f(x) - T_n(x)$ がどのくらいかを教えてくれるのが、次の定理である。

定理 1 テイラーの定理

$f(x)$ が a と x を含む区間で $n+1$ 回微分可能ならば、

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

を満たす c が a と x の間に存在する。 R_{n+1} を**剰余項**（ラグランジュの剰余項）という。

剰余項は「次の項 $\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ の a を、 a と x の間のどこかの c に変えたもの」になっている。 $n=0$ とすると $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ で、これは**平均値の定理**（No.4 定理 3）そのものである。 本によっては剰余項を R_n と書くなど、添字のつけ方が異なるので注意しよう。

【証明】 $x \neq a$ とする（ $x = a$ なら明らか）。 定数 K を $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{K}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ となるように定め、 t の関数

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{K}{(n+1)!} (x-t)^{n+1}$$

を考える。 K の決め方から $F(a) = 0$ 、 また $F(x) = f(x) - f(x) = 0$ 。 ロルの定理より $F'(c) = 0$ となる c が a と x の間にある。 $F'(t)$ を計算すると、和の部分は隣どうしが打ち消し合って（積の微分を使って確かめよう）

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{K}{n!} (x-t)^n.$$

$F'(c) = 0$ と $(x-c)^n \neq 0$ より $K = f^{(n+1)}(c)$. □

特に $a = 0$ の場合を**マクローリンの定理**という。 c は 0 と x の間にあるので $c = \theta x$ ($0 < \theta < 1$) と書いて、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

■ 3. 基本的なマクローリン展開

No.3 例4の高次導関数を使うと、次の公式が得られる。

定理2 基本的な関数のマクローリン展開

いずれも R は剰余項（定理1の形）を表す。

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R \quad (x > -1) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R \quad (x > -1) \end{aligned}$$

ここで α は実数, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ (一般化された二項係数) である。

【証明】 $e^x : f^{(k)}(0) = 1$. $\sin x : f^{(k)}(0) = \sin \frac{k\pi}{2}$ は $0, 1, 0, -1$ をくり返す. $\cos x$: 同様に $1, 0, -1, 0$ をくり返す. $\log(1+x) : f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ なので $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. $(1+x)^\alpha : f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. $\square$

注意

α が自然数 n のとき, $\binom{\alpha}{k}$ はふつうの二項係数 ${}_nC_k$ で, $k > n$ では0になる. つまり $(1+x)^\alpha$ の展開は, 高校で学んだ二項定理の一般化である. たとえば $\alpha = \frac{1}{2}$ とすると $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$ となる.

剰余項 R が $n \rightarrow \infty$ で0に近づくなら, 右辺の多項式を無限に続けた級数で $f(x)$ を表せる. これをテイラー展開 ($a=0$ ならマクローリン展開) という.

定理 3 テイラー展開

次の等式が成り立つ（右辺は無限級数）.

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots & (\text{すべての実数 } x) \\
 \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots & (\text{すべての実数 } x) \\
 \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots & (\text{すべての実数 } x) \\
 \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots & (-1 < x \leq 1) \\
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots & (-1 < x < 1)
 \end{aligned}$$

【証明】 e^x だけ示す. 剰余項は $R = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ (c は 0 と x の間) なので, $|R| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. x を固定すると, n を大きくしたとき分母の $(n+1)!$ が分子の $|x|^{n+1}$ よりずっと速く大きくなるので, $R \rightarrow 0$. 他の式の証明（収束する範囲の決定を含む）は, べき級数の理論を使うので分野「解析学」第6章 No.3 に任せる. $\square$

例 2

e^x の展開で $x=1$ とすると, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ となる. また $\log(1+x)$ の展開で $x=1$ とすると, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ となる.

何回でも微分できても, テイラー展開できるとは限らない

$f(x) = e^{-1/x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ は実数全体で C^∞ 級で, しかも $f^{(k)}(0) = 0$ (すべての k) となることが知られている. すると $x=0$ でのテイラー展開の右辺はすべて 0 だが, $x \neq 0$ では $f(x) > 0$ なので, 展開は $f(x)$ に一致しない. 「テイラー展開で関数を表せる」のは, 剰余項が 0 に近づくことが確かめられたときだけである.

■ 4. テイラー展開の応用

例題 1 近似値と誤差

e^x の4次マクローリン多項式を使って e の近似値を求め, 誤差が 0.025 未満であることを示せ. ただし $e < 3$ は使ってよい.

【解答】 $x=1$, $n=4$ とすると

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + R = 2.7083\cdots + R, \quad R = \frac{e^c}{5!} \quad (0 < c < 1).$$

$0 < e^c < e < 3$ なので $0 < R < \frac{3}{120} = 0.025$. (実際の値は $e = 2.71828\cdots$ で, 誤差は約 0.0099 .)

例題 2

$\sqrt{1.1}$ を2次マクローリン多項式で近似し、誤差が0.0001未満であることを示せ。

【解答】 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, $x = 0.1$ とする. $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{8}$ より

$$\sqrt{1.1} \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 - \frac{1}{8} \times 0.01 = 1.04875.$$

剰余項は $R = \binom{1/2}{3}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3 = \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}(0.1)^3$ ($0 < c < 0.1$) で, $(1+c)^{-\frac{5}{2}} < 1$ なので $0 < R < \frac{0.001}{16} = 0.0000625 < 0.0001$. (実際は $\sqrt{1.1} = 1.048808\dots$)

極限の計算には、剰余項の細かい形よりも「どのくらいの速さで0になるか」だけが分かれば十分なことが多い. そこでランダウの記号を使う: $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{g(x)}{x^n} \rightarrow 0$ となる $g(x)$ をまとめて $o(x^n)$ と書く.

f が C^{n+1} 級なら、剰余項は $o(x^n)$ である ($\frac{R}{x^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x \rightarrow 0$). たとえば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

($\sin x$ の展開には x^4 の項がないので, $o(x^3)$ ではなく $o(x^4)$ と書ける. $\cos x$ も同様.)

例題 3 テイラー展開による極限の計算

次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

【解答】 (1) $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ なので, $\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6}$. (No.4 例題 3 (1) と同じ答え. ロピタルの定理を3回使うより速い.)

(2) $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ なので, 極限は $\frac{1}{24}$.

最後に、高校で学んだ「 f'' の符号による極値の判定」を、テイラーの定理で正当化しておこう.

定理 4 2次導関数による極値の判定

$f(x)$ が $x = a$ の近くで C^2 級で, $f'(a) = 0$ とする.

(1) $f''(a) > 0$ ならば, f は $x = a$ で極小である.

(2) $f''(a) < 0$ ならば, f は $x = a$ で極大である.

【証明】 (1) を示す. テイラーの定理 ($n = 1$) と $f'(a) = 0$ より, $f(x) = f(a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ (c は a と x の間). f'' は連続で $f''(a) > 0$ なので, x が a に十分近ければ $f''(c) > 0$ である. よって $x \neq a$ なら $f(x) > f(a)$. $\square$

注意

$f''(a) = 0$ のときは, この判定法では何も分からない. x^3 , x^4 , $-x^4$ はいずれも $f'(0) = f''(0) = 0$ だが, $x = 0$ でそれぞれ「極値でない」「極小」「極大」である. この判定法の変数版 (ヘッセ行列を使う) は, 第3章 No.5 で扱う. ここでは「対称行列の固有値」(分野「線形代数」第7章 No.5) が活躍する.

コラム：オイラーの公式

テイラー展開の x に、形式的に虚数 $i\theta$ を代入してみよう ($i^2 = -1$). $e^{i\theta}$ の展開の項を、実部と虚部に分けて並べると

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos \theta + i \sin \theta.$$

これが**オイラーの公式**で、 $\theta = \pi$ とすると有名な $e^{i\pi} + 1 = 0$ が得られる. 指数関数と三角関数が、複素数の世界ではひとつながりだったのである. きちんとした扱いは分野「複素関数論」第1章 No.3 と第4章 No.1 で学ぶ.

■ 練習問題

1. 次の関数のマクローリン多項式を、指定された次数まで求めよ.

$$(1) e^{-x} \text{ (4 次まで)} \quad (2) \frac{1}{1-x} \text{ (4 次まで)} \quad (3) e^x \sin x \text{ (3 次まで)} \quad (4) \cos^2 x \text{ (4 次まで)}$$

2. $f(x) = \log x$ の $x = 1$ における 3 次テイラー多項式を求めよ.

3. テイラー展開を使って、次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

4. $\sin 0.1 \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6}$ と近似するときの誤差は 10^{-7} 未満であることを示せ. (ヒント: $\sin x$ の 4 次の項は 0 なので, $n = 4$ として剰余項を考える.)

5. 定理 4 を使って, $f(x) = x^3 - 3x$ の極値を求めよ.

6. (考えてみよう) e が無理数であることを示そう. $e = \frac{p}{q}$ (p, q は自然数) と仮定する.

(a) $2 < e < 3$ を使って, $q \geq 2$ であることを示せ.

(b) マクローリンの定理 ($f(x) = e^x$, $x = 1$, $n = q$) を使って, $q!e - q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!}$ が整数であり, かつ 0 より大きく 1 より小さいことを示し, 矛盾を導け.

■ 練習問題の解答

1. (1) e^x の展開の x を $-x$ に変えて, $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$.
 (2) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} \Big|_{x=0} = k!$ (No.3 例4 (4)) より, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.
 (3) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$ を掛けて3次までとると $x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$. (積のテイラー多項式は, 展開どうしを掛けて必要な次数まで取り出せばよい.)
 (4) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ と $\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{(2x)^4}{24} - \dots = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \dots$ より, $1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4$.

2. $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ より $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 2$.

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

($\log(1+t)$ の展開で $t = x-1$ としたものと同じである.)

3. (1) $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ より $\frac{1}{2}$.
 (2) $\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ より $-\frac{1}{2}$.
 (3) $\sin x - x \cos x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ より $\frac{1}{3}$.
 (4) 通分すると $\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$. $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ より分子は $-\frac{x^4}{3} + o(x^4)$.
 分母は $x^2 \sin^2 x = x^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ で, $\frac{\text{分子}}{x^4} \rightarrow -\frac{1}{3}$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \rightarrow 1$ なので, 極限は $-\frac{1}{3}$.

4. $\sin x$ の4次マクローリン多項式は $x - \frac{x^3}{6}$ (4次の項は0). $n=4$ の剰余項は $R = \frac{\sin^{(5)}(c)}{5!} x^5 = \frac{\cos c}{120} x^5$
 なので, $|R| \leq \frac{(0.1)^5}{120} = \frac{10^{-5}}{120} < 10^{-7}$. (3次までと考えて $n=3$ の剰余項を使うと $\frac{(0.1)^4}{24} \approx 4 \times 10^{-6}$ という粗い評価しか得られない.)

5. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ より $x = \pm 1$. $f''(x) = 6x$. $f''(1) = 6 > 0$ より $x=1$ で極小値 $f(1) = -2$.
 $f''(-1) = -6 < 0$ より $x=-1$ で極大値 $f(-1) = 2$.

6. (a) $q=1$ なら $e=p$ は整数になるが, $2 < e < 3$ なので整数ではない. よって $q \geq 2$.

- (b) マクローリンの定理より $e = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(q+1)!}$ ($0 < c < 1$). 両辺に $q!$ を掛けて

$$q!e - q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \frac{e^c}{q+1}.$$

左辺: $q!e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!p$ は整数, $k \leq q$ なら $\frac{q!}{k!}$ も整数なので, 左辺は整数. 右辺: $1 < e^c < e < 3$

と $q+1 \geq 3$ より $0 < \frac{e^c}{q+1} < 1$. 0 と 1 の間に整数はないので矛盾. よって e は無理数である.