

No.1 不定積分

この回のゴール

- 原始関数と不定積分の意味を説明し、「原始関数は定数の差を除いて1つ」の理由を述べられる.
- 逆三角関数を含む基本公式を使って、不定積分を計算できる.
- 部分分数分解を使って、有理関数の不定積分を計算できる.
- 三角関数の積を和に直して積分できる.

■ 1. 原始関数と不定積分

第1章では「関数を微分する」ことを学んだ. この章では, その逆の「微分すると与えられた関数になる関数を探す」ことから始める.

定義 1 原始関数

区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して, I で $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を, $f(x)$ の**原始関数**という.

たとえば x^2 , $x^2 + 1$, $x^2 - 5$ はどれも $2x$ の原始関数である. 原始関数は1つではないが, 次の定理が示すように「定数の差」しか違わない.

定理 1

$F(x)$, $G(x)$ がともに区間 I における $f(x)$ の原始関数ならば, $G(x) = F(x) + C$ (C は定数) と書ける.

【証明】 $(G - F)' = f - f = 0$ なので, 第1章 No.4 定理4 (1) より, $G - F$ は I で定数である. $\square$

定義 2 不定積分

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると, 原始関数全体を

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

と表し, $f(x)$ の**不定積分**という. C を**積分定数**, $f(x)$ を**被積分関数**という. 不定積分を求めることを「積分する」という.

以下, C は積分定数を表すものとし, いちいち断らない.

「区間」が大切（第1章 No.4 の注意と同じ）

$\frac{1}{x}$ の定義域 $x \neq 0$ は2つの区間 $x > 0$ と $x < 0$ に分かれていますので、定理1は区間ごとにしか使えない。

$$F(x) = \begin{cases} \log x + 1 & (x > 0) \\ \log(-x) - 2 & (x < 0) \end{cases}$$

のように、左右で別々の定数を足したものの $\frac{1}{x}$ の原始関数である。ふつうはこのことを了解したうえで、 $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$ と1つの C でまとめて書く。

■ 2. 基本公式

不定積分の公式は、第1章の微分の公式を逆に読んだものである。右辺を微分すれば左辺の被積分関数になることを確かめよう。

定理2 基本的な関数の不定積分

$a > 0$ とする。(x^α は、 α が整数でないときは $x > 0$ で考える。)

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| < a)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

【証明】最後の2つだけ確かめる。合成関数の微分（第1章 No.3 定理2）と第1章 No.3 定理5より

$$\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

(1つ目では $a > 0$ を使って $a\sqrt{1 - x^2/a^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$ とした。) □

注意

$\frac{1}{x^2 + a^2}$ や $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ は分数や根号だけでできた式なのに、その不定積分には $\arctan$, $\arcsin$ が現れる。高校数学IIIではこれらを「 $x = a \tan \theta$ と置換する」などして定積分だけ計算していたが、大学では逆三角関数を使って不定積分として書ける。

定理3 線形性

$$k, l \text{ を定数とするとき, } \int \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx.$$

例 1

$$(1) \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} + e^x \right) dx = x^3 - 2 \log |x| + e^x + C.$$

$$(2) x > 0 \text{ のとき, } \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x} dx = \int \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = x + 4\sqrt{x} + \log x + C.$$

次の2つは、置換積分 (No.3) の特別な場合だが、よく使うのでここで公式にしておく。どちらも右辺を微分すれば確かめられる。

定理 4

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。

$$(1) a \neq 0 \text{ のとき, } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

$$(2) \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + C.$$

例 2

$$(1) \int \sin(2x + 1) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C, \quad \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

$$(2) \int \frac{1}{2x + 3} dx = \frac{1}{2} \log |2x + 3| + C.$$

$$(3) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + C.$$

■ 3. 有理関数の積分

多項式の分数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ を **有理関数** という。有理関数の不定積分は、次の手順で必ず計算できる。

有理関数の積分の手順

1. 分子の次数 $\geq$ 分母の次数なら、割り算をして「多項式 + (分子の次数 $<$ 分母の次数の分数)」にする。
2. 分母を、実数の範囲で1次式と(実数解をもたない)2次式の積に因数分解する。
3. **部分分数分解**をして、 $\frac{a}{(x-p)^k}$ と $\frac{bx+c}{(x^2+sx+t)^k}$ の形の和にする。
4. それぞれを積分する。1次式の分母からは $\log$ や分数式が、2次式の分母からは $\log$ と $\arctan$ が出てくる。

定理 5

有理関数の不定積分は、有理関数、 $\log$ 、 $\arctan$ の組み合わせで表すことができる。(実数係数の多項式が1次式と2次式の積に分解できることや、部分分数分解ができることの証明は、教科書に任せる。)

例題 1

$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$ を求めよ.

【解答】 $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$ と分解できるので

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} (\log |x - 1| - \log |x + 1|) + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C.$$

例題 2 分母に重解があるとき

$\int \frac{1}{x(x - 1)^2} dx$ を求めよ.

【解答】 $\frac{1}{x(x - 1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$ とおき、分母を払うと

$$1 = a(x - 1)^2 + bx(x - 1) + cx.$$

$x = 0$ を代入して $a = 1$, $x = 1$ を代入して $c = 1$, x^2 の係数を比べて $a + b = 0$ より $b = -1$. よって

$$\int \frac{1}{x(x - 1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} \right) dx = \log |x| - \log |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C.$$

($(x - 1)^2$ のような重複因子があるときは, $\frac{b}{x - 1}$ と $\frac{c}{(x - 1)^2}$ の両方を用意するのがポイントである.)

例題 3 分母が実数解をもたない 2 次式のとき

$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx$ を求めよ.

【解答】 分母を微分すると $2x + 2$ なので、分子を「分母の微分 + 定数」に分ける: $2x + 3 = (2x + 2) + 1$.
また $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ と平方完成できる. 定理 4 と定理 2 より

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \log(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x + 1) + C.$$

($x^2 + 2x + 2 > 0$ なので絶対値は不要.)

■ 4. 三角関数の積分

三角関数の 2 乗や積は、そのままでは積分しにくい. 半角の公式や積和の公式で 1 次の和に直してから積分する.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A + B) + \sin(A - B) \}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A + B) + \cos(A - B) \}, \quad \sin A \sin B = -\frac{1}{2} \{ \cos(A + B) - \cos(A - B) \}$$

例 3

$$(1) \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$(2) \int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

コラム：積分できない関数？

微分は、どんな初等関数（多項式・指数・対数・三角・逆三角関数とそれらの組み合わせ）を微分しても初等関数になる．ところが積分はそうはいかない．たとえば

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\log x} dx$$

は、原始関数は存在する（No.2 で見るように、連続関数には必ず原始関数がある）のに、それを初等関数で書くことができないことが証明されている．特に e^{-x^2} は正規分布（分野「確率・統計」第2章 No.4）の中心にいる関数で、不定積分は書けなくても、 $-\infty$ から ∞ までの積分の値は $\sqrt{\pi}$ と求められる（No.4）．

■ 練習問題

1. 次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int (x^3 - 4x + 5) dx \quad (2) \int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx \quad (3) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(4) \int 3^x dx \quad (5) \int \tan^2 x dx$$

2. 次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \cos(3x-2) dx \quad (2) \int \sqrt{2x+1} dx \quad (3) \int \frac{1}{x^2+4} dx \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

3. 次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \frac{x}{x^2+1} dx \quad (2) \int \frac{1}{x \log x} dx \quad (3) \int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$$

4. 次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \frac{1}{x^2+x-2} dx \quad (2) \int \frac{x^2+1}{x-1} dx \quad (3) \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

5. 次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \cos^2 x dx \quad (2) \int \sin 5x \sin 3x dx$$

6. $F'(x) = e^x + 2x$, $F(0) = 3$ を満たす関数 $F(x)$ を求めよ．

7. (考えてみよう) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ を使って部分分数分解し, $\int \frac{1}{x^3+1} dx$ を求めよ．

■ 練習問題の解答

1. (1) $\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C.$

(2) $\frac{(x-1)^2}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ より, $x - 2\log|x| - \frac{1}{x} + C.$

(3) $\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$

(4) $\frac{3^x}{\log 3} + C.$

(5) $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ より, $\tan x - x + C.$

2. (1) $\frac{1}{3}\sin(3x-2) + C.$

(2) $\int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

(3) 定理2で $a=2$ として $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C.$

(4) 定理2で $a=3$ として $\arcsin \frac{x}{3} + C.$

3. (1) $\frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$

(2) $\frac{1}{x\log x} = \frac{(\log x)'}{\log x}$ より, $\log|\log x| + C.$

(3) $\log(2+\sin x) + C$ ($2+\sin x > 0$).

4. (1) $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$ より, $\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$

(2) 割り算して $\frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1}$. よって $\frac{x^2}{2} + x + 2\log|x-1| + C.$

(3) $x^2+2x+5 = (x+1)^2 + 2^2$ より, 定理2と定理4(1)で $\frac{1}{2}\arctan \frac{x+1}{2} + C.$

5. (1) $\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

(2) $\sin 5x \sin 3x = -\frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 2x)$ より, $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C.$

6. $F(x) = e^x + x^2 + C$. $F(0) = 1 + C = 3$ より $C = 2$. よって $F(x) = e^x + x^2 + 2$.

7. $\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ とおくと, $1 = a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)$. $x = -1$ を代入して $3a = 1$, $a = \frac{1}{3}$. x^2 の係数から $a+b=0$ で $b = -\frac{1}{3}$, 定数項から $a+c=1$ で $c = \frac{2}{3}$. よって

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1}.$$

$(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}(2x-1) + \frac{1}{2}$ と, 分母の微分 $2x-1$ を作った.) 最後の項は $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ として定理2を使う.

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$