大学数学のアトリエ｜微分積分　第 2 章　1 変数積分

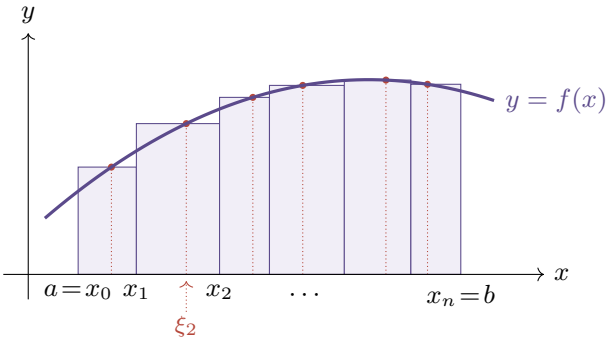
No.2　定積分

この回のゴール

- 定積分を「細い長方形の面積の和の極限」（リーマン和）として説明できる．
- 定積分の基本的な性質と，積分の平均値の定理を使える．
- 微分積分学の基本定理を述べ，「微分と積分が逆の操作である」理由を説明できる．
- 定積分を計算し，面積や区分求積法による極限の計算に応用できる．

■ 1. 定積分の定義

高校数学では，定積分を「原始関数 F を使って $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$」と**定義**し，それが面積を表すことを後から確かめた．大学では順番が逆になる．まず「面積」を細い長方形の和の極限として定義し，それが原始関数で計算できることを**定理**として示す（第 3 節）．こうしておくと，原始関数が分からない関数でも定積分を考えることができる．



定義 1　定積分（リーマン和による定義）

関数 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$（$a < b$）で考える．

(i) 区間を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ と分割し，各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から点 ξ_k を 1 つずつ選ぶ．

(ii) 和 $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ を作る（これを**リーマン和**という）．

(iii) 小区間の幅の最大値を 0 に近づけたとき，分割の仕方や ξ_k の選び方によらず S が一定の値に近づくならば，f は $[a, b]$ で**積分可能**であるといい，その値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書いて**定積分**という．

また，$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$，$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ と約束する．

$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ は長方形（$f < 0$ なら符号つき）の面積で，記号 $\int$ は和（Summa）の頭文字 S を縦に伸ばしたもの，dx は「小さな幅」を表している．つまり $\int_a^b f(x)\,dx$ は「$f(x) \times$（幅 dx）を a から b まで足し合わせたもの」と読める．

定理 1

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，f は $[a, b]$ で積分可能である．（証明は分野「解析学」第 5 章 No.1，No.2 に任せる．）

例 1　区分求積法

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を定義どおりに求める．$[0, 1]$ を n 等分し，$\xi_k = \dfrac{k}{n}$（各小区間の右端）とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \longrightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (n \to \infty).$$

x^2 は連続なので積分可能で（定理 1），等分割の特別な場合の極限が定積分の値に一致する．よって $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

■ 2. 定積分の性質

リーマン和の性質から，次のことが分かる（長方形の面積の和で考えれば自然である）．

定理 2　定積分の性質

f，g は積分可能とする．

(1)（線形性） $\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$（$k$，$l$ は定数）

(2)（区間の加法性） $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(3)（単調性） $a < b$ で，$[a, b]$ でつねに $f(x) \leq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(4) $a < b$ ならば $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(2) は定義 1 の最後の約束のおかげで，a，b，c の大小によらず成り立つ．(3)，(4) では $a < b$ が必要であることに注意しよう．

定理 3　積分の平均値の定理

$f(x)$ が $[a, b]$ で連続ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \qquad a \leq c \leq b$$

を満たす c が存在する．

【証明】 最大値・最小値の定理（第 1 章 No.1 定理 7）より，f は $[a, b]$ で最小値 m，最大値 M をとる．$m \leq f(x) \leq M$ を積分して（定理 2 (3)）

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a), \qquad \text{すなわち} \qquad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

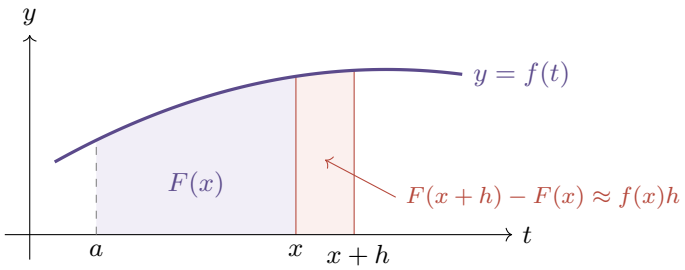
中間値の定理（第 1 章 No.1 定理 6）より，f は m と M の間の値をすべてとるので，$f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

となる c がある．　□

$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は f の $[a,b]$ における**平均値**で，「面積を幅で割った高さ」である．定理 3 は「平均値は，f がどこかで実際にとる値である」と言っている．

■ 3. 微分積分学の基本定理

積分の上端を変数 x にした関数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を考える．$F(x)$ は「a から x までの（符号つき）面積」である．



定理 4　微分積分学の基本定理 (1)

$f(x)$ が区間 I で連続で，$a\in I$ とする．$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと，$F(x)$ は I で微分可能で

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x).$$

特に，連続関数には必ず原始関数が存在する．

【証明】$h\neq 0$ とすると，定理 2 (2) と積分の平均値の定理（定理 3）より

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(c_h)$$

となる c_h が x と $x+h$ の間にある．$h\to 0$ のとき $c_h\to x$ なので，f の連続性より $f(c_h)\to f(x)$．（$h<0$ のときも，$\int_x^{x+h}=-\int_{x+h}^x$ に注意すれば同じ式になる．）　□

図で言えば，「面積の増え方（F'）は，そこでの高さ（f）に等しい」ということである．

定理 5　微分積分学の基本定理 (2)

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で，$G(x)$ をその原始関数の 1 つとすると

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)=\Big[G(x)\Big]_a^b.$$

【証明】定理 4 の $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ も原始関数なので，No.1 定理 1 より $G(x)=F(x)+C$．よって $G(b)-G(a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt-0$．　□

こうして，「面積（リーマン和の極限）」と「微分の逆（原始関数）」という，まったく別の考え方から来た 2 つのものが結びついた．高校で定義として覚えた公式は，大学ではこの定理として証明されるのである．

注意

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の t は積分の中だけで使われる文字（**積分変数**）で，$\displaystyle\int_a^x f(s)\,ds$ と書いても同じものを表す．上端の x と区別するために別の文字を使っている．$\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ と書くと，どの x が何を表すのか分からなくなるので避けよう．

例題 1

次の関数を x で微分せよ．

$$(1)\ \int_0^{x^2} \sin t\,dt \qquad (2)\ \int_x^{2x} e^{t^2}\,dt$$

【解答】 (1) $F(u)=\displaystyle\int_0^u \sin t\,dt$ とおくと，与えられた関数は $F(x^2)$．合成関数の微分と定理 4 より $\dfrac{d}{dx}F(x^2)=F'(x^2)\cdot 2x=2x\sin(x^2)$.

(2) e^{t^2} の原始関数は初等関数では書けないが（No.1 コラム），それでも微分はできる．$\displaystyle\int_x^{2x}=\int_0^{2x}-\int_0^x$ と分けて，(1) と同様に

$$\frac{d}{dx}\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt = e^{(2x)^2}\cdot 2 - e^{x^2} = 2e^{4x^2}-e^{x^2}.$$

■ 4. 定積分の計算と応用

例 2

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2,\quad \int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^e=1,\quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[\arctan x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

定理 6　偶関数・奇関数の積分

f が $[-a,\,a]$ で連続とする．

(1) f が偶関数（$f(-x)=f(x)$）ならば $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$.

(2) f が奇関数（$f(-x)=-f(x)$）ならば $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

（グラフの対称性から明らかだが，式で示すには置換 $x=-t$ を使う．No.3 練習問題で確かめよう．）

例題 2　面積

$\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{5\pi}{4}$ の範囲で，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

【解答】 2 曲線は $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$ で交わり，その間では $\sin x\ge\cos x$．よって面積は

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}=\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\right)=2\sqrt2.$$

例 1 と逆に，和の極限を定積分で計算することもできる．f が $[0,\,1]$ で連続なら，定義 1 で n 等分・右

端をとって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

例題 3　区分求積法による極限

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ を求めよ.

【解答】 $\dfrac{1}{n+k}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$ なので，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ として

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2.$$

コラム：コンピュータは定積分をどう計算するか

原始関数が分からない関数の定積分（たとえば $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$）も，定義 1 のリーマン和を実際に計算すれば近似値が得られる．長方形の代わりに台形で近似すると精度が上がり（台形公式），放物線で近似するとさらに上がる（シンプソン公式）．これらは分野「数値解析」第 3 章 No.1，No.2 で扱う．「定積分は和の極限」という定義は，計算の現場でもそのまま生きているのである．

■ 練習問題

1. 次の定積分を求めよ．

$$(1)\ \int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx \qquad (2)\ \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \qquad (3)\ \int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$(4)\ \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (5)\ \int_0^3 |x-1|\,dx$$

2. 定理 6 を使って，次の定積分を求めよ．

$$(1)\ \int_{-1}^1 (x^3\cos x + x^2)\,dx \qquad (2)\ \int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\,dx$$

3. 次の関数を x で微分せよ．

$$(1)\ \int_1^x \log t\,dt\ \ (x>0) \qquad (2)\ \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt \qquad (3)\ \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

4. 曲線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

5. 次の極限を，定積分で表して求めよ．

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

6. 連続関数 $f(x)$ が $f(x)=x+\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

7.（考えてみよう）$n\geq 2$ とする．$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと長方形を比べることで，

$$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$$

を示せ．また，このことから $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ が発散することを説明せよ．

■ 練習問題の解答

1. (1) $\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}\right]_1^2=\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{3}-1\right)=\dfrac{17}{6}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

(3) $\left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^1=\dfrac{e^2-1}{2}$.

(4) $\left[\arcsin x\right]_0^{1/2}=\dfrac{\pi}{6}$.

(5) $x=1$ で区間を分けて $\displaystyle\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

2. (1) $x^3\cos x$ は奇関数，x^2 は偶関数なので，$\displaystyle 0+2\int_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3}$.

(2) $x^2\sin x$ は奇関数なので 0.

3. (1) 定理 4 より $\log x$.

(2) $3x^2e^{-x^6}$.

(3) $\displaystyle\int_x^{x^2}=\int_0^{x^2}-\int_0^x$ より $\dfrac{2x}{1+x^4}-\dfrac{1}{1+x^2}$.

4. 交点は $x^2-2x=x$ より $x=0,3$. $0\le x\le 3$ で $x\ge x^2-2x$ なので $\displaystyle\int_0^3\{x-(x^2-2x)\}\,dx=\int_0^3(3x-x^2)\,dx=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}$.

5. (1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$.

(2) $\dfrac{n}{n^2+k^2}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ より $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$.

6. $\displaystyle K=\int_0^1 tf(t)\,dt$ は定数なので，$f(x)=x+K$ と書ける．代入して $\displaystyle K=\int_0^1 t(t+K)\,dt=\frac{1}{3}+\frac{K}{2}$.
よって $K=\dfrac{2}{3}$，$f(x)=x+\dfrac{2}{3}$.

7. $k\le x\le k+1$ では $\dfrac{1}{k+1}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{k}$（等号は端点のみ）なので，定理 2 (3) より

$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}.$$

右側の不等式を $k=1,\dots,n$ で足すと $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. 左側の不等式を $k=1,\dots,n-1$ で足すと $\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n$ で，両辺に 1 を足せばよい．（等号が端点でしか成り立たない連続関数の積分では，定理 2 (3) の不等号は $<$ にできる．）$n\to\infty$ のとき $\log(n+1)\to\infty$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$，つまり調和級数は発散する．（$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ は $\log n$ と同じくらいの速さで，とてもゆっくり大きくなる．）