

## No.3 置換積分と部分積分

## この回のゴール

- 置換積分の公式を合成関数の微分から導き、不定積分・定積分の両方で使える。
- 部分積分の公式を積の微分から導き、どちらを微分するかを判断して使える。
- 三角関数による置換,  $t = \tan \frac{x}{2}$  の置換など, 典型的な置換を使い分けられる。
- 部分積分で漸化式を作り,  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$  を計算できる。

## ■ 1. 置換積分

微分の公式には「和・積・商・合成関数」があった。和の公式を逆に読んだのが積分の線形性 (No.1 定理3) である。この回では、**合成関数の微分**を逆に読んだ「置換積分」と、**積の微分**を逆に読んだ「部分積分」を学ぶ。

置換積分には、「 $u = g(x)$  とおく」向きと「 $x = g(t)$  とおく」向きの2通りの使い方がある。どちらも、 $f$  の原始関数  $F$  と合成関数の微分  $\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$  (第1章 No.3 定理2) から出てくる。

## 定理 1 置換積分 (不定積分)

区間  $I$  で連続な関数  $f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とする。

- (1)  $u = g(x)$  が微分可能で  $g'$  が連続, 値  $g(x)$  が  $I$  に入るならば

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

つまり,  $u$  について積分した  $\int f(u)du = F(u) + C$  に  $u = g(x)$  を代入すればよい。

- (2) 区間  $J$  で  $x = g(t)$  が微分可能で  $g'$  が連続, さらに  $J$  でつねに  $g'(t) \neq 0$  であり,  $g$  が  $J$  を  $I$  に移すとする。このとき

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C$$

であり,  $g$  の逆関数  $t = g^{-1}(x)$  を代入して  $t$  を  $x$  に戻すと,  $F(x) + C = \int f(x)dx$  が得られる。

【証明】(1) 合成関数の微分より  $\{F(g(x))\}' = f(g(x))g'(x)$  なので,  $F(g(x))$  は左辺の被積分関数の原始関数である。

(2) 同様に  $\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t)$  なので, 前半の等式が成り立つ。  $g'$  は連続で 0 にならないので, 中間値の定理 (第1章 No.1 定理6) より  $J$  でつねに  $g' > 0$  またはつねに  $g' < 0$  である。よって  $g$  は狭義単調 (第1章 No.4 定理4) で逆関数  $t = g^{-1}(x)$  をもち,  $F(g(g^{-1}(x))) = F(x)$  となる。□

**$x$  に戻すときの注意**

(2) の向きでは、最後に「 $t$  を  $x$  の式で表す」必要があるのですが、 $x$  と  $t$  が **1対1に対応する範囲**で置換しなければならない。たとえば  $x = \sin t$  とおくときは、 $t$  を  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$  に制限すれば  $t = \arcsin x$  と戻せる。 $t$  の範囲を決めずに置換すると、 $t$  がどの値か分からなくなる。(定積分(定理2)では、区間ごと置きかえて  $x$  に戻さないで、この点は気にしないでよい。)

覚え方としては、 $x = g(t)$  のとき  $\frac{dx}{dt} = g'(t)$  を「 $dx = g'(t) dt$ 」と分数のように書きかえて、 $\int f(x) dx$  に代入すればよい(第1章 No.3 コラム)。ただし、これは定理1(2)の内容を短く書いたものであり、 $\int f(x) dx$  と  $\int f(g(t))g'(t) dt$  は**変数が違う**ので、「 $t$  を  $x$  に戻してはじめて等しい」と理解しておこう。

**例1 定理1(1)の使い方**

(1)  $u = x^2 + 1$  とおくと  $du = 2x dx$  なので、

$$\int x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{u^4}{8} + C = \frac{(x^2 + 1)^4}{8} + C.$$

(2)  $u = \sin x$  とおくと  $du = \cos x dx$  なので、 $\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

**定理2 置換積分(定積分)**

$x = g(t)$  は  $\alpha$  と  $\beta$  を含む区間で**微分可能**で  $g'(t)$  が**連続**、 $g(\alpha) = a$ 、 $g(\beta) = b$  とし、 $f(x)$  は  $g(t)$  のとる値の範囲で**連続**とする。このとき

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

**【証明】** 定理1の証明と同じく  $F(g(t))$  は右辺の被積分関数の原始関数なので、No.2 定理5より右辺  $= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) =$  左辺。□

定積分の置換では、**積分区間も一緒に置きかえる**ので、最後に  $x$  に戻す必要がない。

**例題1**

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  を求めよ。

**【解答】**  $x = \sin t$  とおくと  $dx = \cos t dt$ 。  $x$  が  $0 \rightarrow 1$  のとき  $t$  は  $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  と対応させる。この範囲では  $\cos t \geq 0$  なので  $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ 。 よって

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

これは半径1の四分円の面積で、図形的な意味とも合っている。

**注意**

$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$  であり、いつでも  $\cos t$  になるわけではない。 $t$  の範囲を  $\cos t \geq 0$  となるように選ぶ(あるいは場合分けする)ことを忘れないようにしよう。

## 例題 2

$\int \frac{1}{e^x + 1} dx$  を求めよ.

【解答】  $t = e^x$  ( $t > 0$ ) とおくと,  $x = \log t$  と 1 対 1 に対応し,  $dx = \frac{dt}{t}$ . 部分分数分解して

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \log t - \log(t+1) + C = x - \log(e^x + 1) + C.$$

( $t = e^x > 0$  なので絶対値は不要.)

よく使う置換を表にまとめておく. どれも「根号や三角関数を消して, 有理関数の積分 (No.1 第3節) に持ち込む」ためのものである.

## 典型的な置換

被積分関数に含まれるもの    置換

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad x = a \sin t \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{1}{x^2 + a^2}, \sqrt{x^2 + a^2} \quad x = a \tan t \quad \left( -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sqrt{ax + b} \quad t = \sqrt{ax + b}$$

$$e^x \text{ だけでできた式} \quad t = e^x$$

$$\sin x, \cos x \text{ の有理式} \quad t = \tan \frac{x}{2}$$

最後の置換は万能の道具である.  $t = \tan \frac{x}{2}$  ( $-\pi < x < \pi$ . この範囲で  $x = 2 \arctan t$  と 1 対 1 に対応する) とおくと, 倍角の公式から

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

となり (練習問題 8 で確かめよう),  $\sin x, \cos x$  の有理式の積分は, 必ず  $t$  の有理関数の積分になる.

## 例題 3

$0 < x < \pi$  のとき,  $\int \frac{1}{\sin x} dx$  を求めよ.

【解答】  $t = \tan \frac{x}{2}$  とおくと

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C = \log \left( \tan \frac{x}{2} \right) + C.$$

( $0 < x < \pi$  では  $\tan \frac{x}{2} > 0$ .)

## 2. 部分積分

### 定理 3 部分積分

$f, g$  が微分可能で,  $f', g'$  が連続ならば

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx, \\ \int_a^b f(x)g'(x) dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.\end{aligned}$$

【証明】積の微分  $(fg)' = f'g + fg'$  を積分すると  $fg = \int f'g dx + \int fg' dx$ . 移項すればよい. 定積分も同様 (No.2 定理 5).  $\square$

使うときは, 被積分関数を「微分する側  $f$ 」と「積分する側  $g'$ 」に分ける. 右辺の  $\int f'g dx$  が元より簡単になるように分けるのがコツである.

### 例 2

- (1)  $\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x-1)e^x + C. (f = x, g' = e^x)$
- (2)  $\int \log x dx = \int (\log x) \cdot 1 dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \log x - x + C. (f = \log x, g' = 1)$
- (3)  $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.$
- (4)  $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. (2 \text{ 回使う})$

### どちらを微分するか

目安として, 次の順に「微分する側  $f$ 」に選ぶとうまくいくことが多い.

対数関数・逆三角関数  $\rightarrow$  多項式  $\rightarrow$  三角関数・指数関数

(左ほど微分すると簡単になり, 右ほど積分しても複雑にならない.) 例 2 (2), (3) のように「1 を掛けて  $g' = 1$  とみる」のもよく使う手である.

### 例題 4 同じ積分が戻ってくる例

$I = \int e^x \sin x dx$  を求めよ.

【解答】  $f = \sin x, g' = e^x$  として部分積分を 2 回使うと

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left( e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right) = e^x (\sin x - \cos x) - I.$$

元の  $I$  が右辺に戻ってきたので, 移項して  $2I = e^x (\sin x - \cos x)$ . よって  $I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$ .

### ■ 3. 部分積分と漸化式

#### 例題 5 ウォリスの積分

$n \geq 0$  に対して  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$  とおく.

(1)  $n \geq 2$  のとき,  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  を示せ.

(2)  $I_4, I_5$  を求めよ.

【解答】 (1)  $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$  とし,  $f = \sin^{n-1} x$ ,  $g' = \sin x$  ( $g = -\cos x$ ) として部分積分する.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[ -\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

( $n \geq 2$  なので,  $x=0$  でも  $x=\frac{\pi}{2}$  でも境界の項は 0.)  $I_n$  を移項して  $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ .

(2)  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = \left[ -\cos x \right]_0^{\pi/2} = 1$  から, 漸化式をくり返し使って

$$I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{3\pi}{16}, \quad I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{8}{15}.$$

一般に,  $n$  が偶数なら  $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ , 奇数なら  $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$  となる. また,  $x = \frac{\pi}{2} - t$  と置換すると  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = I_n$  であることも分かる.

#### コラム：ウォリスの公式

$I_n$  は  $n$  について減少し ( $0 \leq \sin x \leq 1$  より  $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ ), さらに  $\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \rightarrow 1$  となることが示せる. これと例題 5 の式を組み合わせると,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

という,  $\pi$  を分数の無限積で表す不思議な公式 (ウォリスの公式) が得られる. 積分の計算から  $\pi$  の新しい表し方が出てくるのは, 微分積分の面白さの 1 つである.

## ■ 練習問題

**発展** のついた問題は、この回の内容から一歩踏み出した発展問題である。最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい。

1. 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int x\sqrt{x^2+1} dx \quad (2) \int \frac{(\log x)^2}{x} dx \quad (3) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad (4) \int \sin^3 x dx$$

2. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad (2) \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx \quad (3) \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx \quad (4) \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx$$

3. 次の積分を求めよ.

$$(1) \int x \cos x dx \quad (2) \int x^2 e^x dx \quad (3) \int_1^e x \log x dx$$

$$(4) \int \arcsin x dx \quad (5) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

4.  $\int e^{2x} \cos x dx$  を求めよ.

5. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx \quad (2) \int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx$$

6.  $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$  ( $n \geq 0$ ) とする.  $n \geq 1$  のとき  $J_n = e - nJ_{n-1}$  を示し,  $J_2$  を求めよ.

7.  $f$  が  $[-a, a]$  で連続とする. 置換  $x = -t$  を使って, No.2 定理 6 を示せ.

ヒント:  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$  と分け, 第1項を置換する.

8. **発展** (考えてみよう)

(a)  $t = \tan \frac{x}{2}$  のとき,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$  となることを確かめよ.

(b)  $x = \pi - t$  と置換して,  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  を示せ ( $f$  は連続).

(c) (b) を使って,  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  を求めよ.

## ■ 練習問題の解答

1. (1)  $u = x^2 + 1$ ,  $du = 2x dx$  より  $\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + C$ .

(2)  $u = \log x$ ,  $du = \frac{dx}{x}$  より  $\int u^2 du = \frac{(\log x)^3}{3} + C$ .

(3)  $t = \sqrt{x+1}$  とおくと  $x = t^2 - 1$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\int \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C = \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + C.$$

(4)  $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x$  で  $u = \cos x$ ,  $du = -\sin x dx$  より

$$-\int (1 - u^2) du = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2. (1)  $x = 2 \sin t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) とおくと  $\int_0^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$ . (半径 2 の四分円の面積.)

(2)  $u = x^2$  とおくと  $du = 2x dx$ ,  $u$  は  $0 \rightarrow 1$ .  $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$ .

(3)  $u = \cos x$  とおくと  $u$  は  $1 \rightarrow 0$ .  $\int_1^0 u^2 \cdot (-du) = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$ .

(4)  $x = \tan t$  とおくと  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ ,  $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ ,  $t$  は  $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ .

$$\int_0^{\pi/4} \cos^3 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. (1)  $x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$ .

(2)  $x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$  (例 2 (1) を使った).

(3)  $\left[ \frac{x^2}{2} \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

(4)  $x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ .

(5)  $\left[ -x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{2}{e}$ .

4.  $I = \int e^{2x} \cos x dx$  とおき,  $g' = e^{2x}$  として 2 回部分積分すると

$$I = \frac{e^{2x}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2x}}{2} \sin x - \frac{1}{2} I \right).$$

$$\frac{5}{4} I = \frac{e^{2x}}{4} (2 \cos x + \sin x) \text{ より } I = \frac{e^{2x} (2 \cos x + \sin x)}{5} + C.$$

5. (1)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$ . (2)  $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{16}{35}$ .

6.  $f = x^n$ ,  $g' = e^x$  として  $J_n = \left[ x^n e^x \right]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n J_{n-1}$ .  $J_0 = e - 1$  より  $J_1 = e - (e - 1) = 1$ ,  $J_2 = e - 2J_1 = e - 2$ .

7.  $x = -t$  とおくと  $dx = -dt$ ,  $x$  が  $-a \rightarrow 0$  のとき  $t$  は  $a \rightarrow 0$ .

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t) \cdot (-dt) = \int_0^a f(-t) dt.$$

偶関数なら  $f(-t) = f(t)$  で、これは  $\int_0^a f(x) dx$  に等しいので、全体は  $2 \int_0^a f(x) dx$ . 奇関数なら  $f(-t) = -f(t)$  で  $-\int_0^a f(x) dx$  となり、全体は 0.

8. (a) 倍角の公式と  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$  より  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ . また

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2} \text{ より } dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

(b)  $I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx$  とおく.  $x = \pi - t$  とすると  $\sin x = \sin t$ ,  $dx = -dt$ ,  $t$  は  $\pi \rightarrow 0$  なので

$$I = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I.$$

$$\text{よって } I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

(c)  $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$  は  $\sin x$  の関数なので, (b) より

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$u = \cos x$  とおくと  $u$  は  $1 \rightarrow -1$  で,  $\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \left[ \arctan u \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ . ( $x \sin x$  の原始関数を直接求めようとすると大変だが, 対称性を使うと  $x$  が消える.)