

No.4 広義積分

この回のゴール

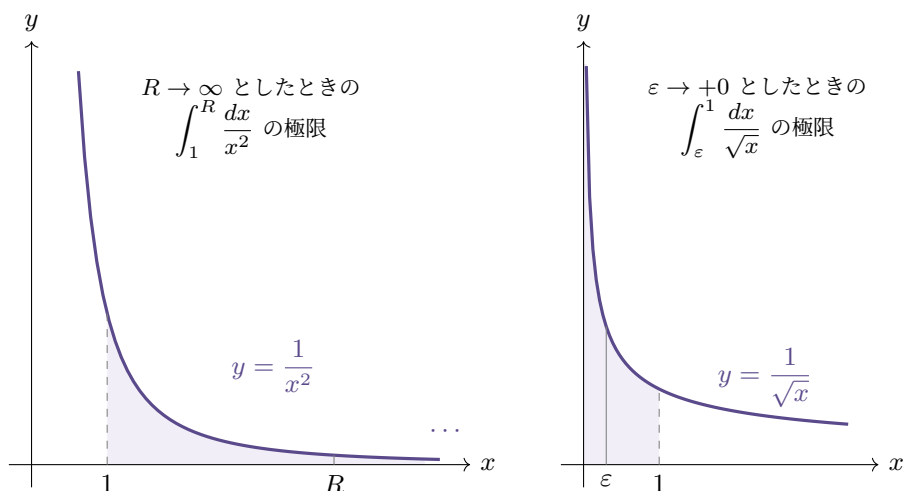
- 無限区間の積分と、端で値が発散する関数の積分を、極限を使って定義できる.
- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ が収束する条件を答えられる.
- 比較判定法を使って、値を求めずに広義積分の収束・発散を判定できる.
- ガンマ関数の定義と $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を理解し、ガウス積分の値を知る.

■ 1. 広義積分とは

No.2 の定積分は「有限の閉区間 $[a, b]$ 」で「(連続な) 有界な関数」を積分するものだった. しかし, 次のような積分も考えたい.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{区間が無限に長い}), \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (x \rightarrow +0 \text{ で被積分関数が } \infty \text{ に発散する}).$$

どちらも, 図の色のついた部分は無限に伸びているが, その面積は有限の値になる. これを「積分できる範囲で計算してから極限をとる」ことで定義するのが**広義積分**である.



定義 1 無限区間の広義積分

$f(x)$ が $[a, \infty)$ で連続なとき,

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

と定める. 右辺の極限が (有限の値として) 存在するとき広義積分は**収束する**といい, 存在しないとき**発散する**という. $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ も同様に定める. $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ は, 適当な c で $\int_{-\infty}^c + \int_c^\infty$ と分け, 両方が収束するときに収束するという.

定義 2 端で発散する関数の広義積分

$f(x)$ が $(a, b]$ で連続なとき ($x = a$ では定義されていなくてよい),

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

と定める. 右端 b で発散する場合も同様. 区間の内部の点で発散する場合は, その点で区間を分けて, それぞれが収束するときに収束するという.

本によっては, 広義積分を**異常積分**, **特異積分**などとも呼ぶ.

例 1

- (1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{R} \right) = 1$. (収束)
- (2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[2\sqrt{x} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$. (収束)
- (3) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \log R = \infty$. (発散)
- (4) $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R}) = 1$. (収束)

慣れてきたら, $\left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 0 - (-1) = 1$ のように, 「 ∞ を代入する」部分を極限の意味で書いてよい.

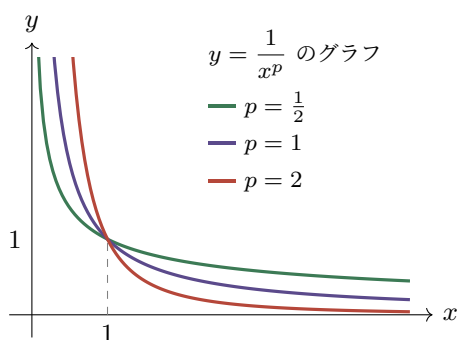
定理 1 基本となる広義積分

- (1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ は, $p > 1$ のとき収束して値は $\frac{1}{p-1}$, $p \leq 1$ のとき発散する.
 - (2) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ は, $p < 1$ のとき収束して値は $\frac{1}{1-p}$, $p \geq 1$ のとき発散する.
- (どちらも p は任意の実数でよい.)

【証明】 (1) $p \neq 1$ のとき $\int_1^R x^{-p} dx = \frac{R^{1-p} - 1}{1-p}$. $p > 1$ なら $R^{1-p} \rightarrow 0$ で $\frac{1}{p-1}$ に収束し, $p < 1$ なら $R^{1-p} \rightarrow \infty$ で発散. $p = 1$ は例 1 (3).

(2) $p \neq 1$ のとき $\int_\varepsilon^1 x^{-p} dx = \frac{1 - \varepsilon^{1-p}}{1-p}$. $p < 1$ なら $1-p > 0$ より $\varepsilon^{1-p} \rightarrow 0$ で収束し, $p > 1$ なら $\varepsilon^{1-p} \rightarrow \infty$ で発散. $p = 1$ のときは $-\log \varepsilon \rightarrow \infty$ で発散. $\square$

(2) で $p \leq 0$ のときは, $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$ は $x = 0$ でも連続 ($p = 0$ なら定数 1) なので, 本当は広義積分を持ち出すまでもない, ふつうの定積分である. それでも極限で計算した値は定積分の値と一致する ($\int_\varepsilon^1$ は ε について連続なので) から, 定理 1 (2) は p の値によらず 1 つの形で書ける. 広義積分として本当に意味があるのは $0 < p < 1$ の場合で, このときは $x \rightarrow +0$ でグラフが無限に高くなるのに, 面積は有限になる.



	$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$
$p < 1$	収束	発散
$p = 1$	発散	発散
$p > 1$	発散	収束

$x > 1$ では p が大きいほど速く 0 に近づき, $0 < x < 1$ では p が大きいほど速く ∞ に向かって大きくなる. 境目はどちらも $p = 1$ で, $\frac{1}{x}$ は「両側でぎりぎり発散する」関数である. したがって $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ はどんな p でも発散する.

注意

- 「遠くで 0 に近づく」だけでは収束しない. $\frac{1}{x}$ も 0 に近づくが, 近づき方が遅いので発散する. ∞ の方では「 $\frac{1}{x}$ より速く 0 に近づく」ことが目安になる. 逆に 0 の近くでは「 $\frac{1}{x}$ よりゆっくり発散する」ことが目安になる.
- 途中で発散する点を見落とさないこと. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ を $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$ と計算するのは誤り (正の関数の積分が負になるはずがない). $x = 0$ で分けると $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ が発散するので, この広義積分は発散する.
- $\int_{-\infty}^\infty x dx$ は, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0$ だが, 定義 1 では $\int_0^\infty x dx$ が発散するので**発散**である. 両端を同じ速さで動かした極限は**コーシーの主値**と呼ばれ, 広義積分とは区別される.

例題 1

次の広義積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \log x dx \quad (2) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

【解答】 (1) $\log x$ は $x \rightarrow +0$ で $-\infty$ に発散する. No.3 例 2 (2) より

$$\int_\varepsilon^1 \log x dx = \left[x \log x - x \right]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon \rightarrow -1 \quad (\varepsilon \rightarrow +0).$$

ここで $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$ (第 1 章 No.4 例題 3 (3)) を使った.

(2) 0 で分けると, $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan R = \frac{\pi}{2}$, 同様に $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. 両方収束するので, 値は π .

(3) $x \rightarrow 1-0$ で発散する. $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\arcsin x \right]_0^{1-\varepsilon} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

■ 2. 収束の判定

原始関数が求められない場合でも、「収束するかどうか」だけなら判定できることが多い。基本となるのは、大きさを比べる方法である。

定理 2 比較判定法

$f(x), g(x)$ は $[a, \infty)$ で連続で, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ とする.

- (1) $\int_a^\infty g(x) dx$ が収束するならば, $\int_a^\infty f(x) dx$ も収束する.
 (2) $\int_a^\infty f(x) dx$ が発散するならば, $\int_a^\infty g(x) dx$ も発散する.

端で発散する関数の広義積分 (定義 2) についても同様である.

【証明】(1) $F(R) = \int_a^R f(x) dx$ は, $f \geq 0$ なので R について増加し, $F(R) \leq \int_a^R g(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$ なので上に有界である. 「上に有界な増加関数は極限をもつ」(実数の連続性. 分野「解析学」第1章 No.1) より, $F(R)$ は $R \rightarrow \infty$ で収束する. (2) は (1) の対偶である. $\square$

注意

比較判定法は $f \geq 0$ のときにしか使えない. 符号が変わる関数には, 次の定理を使う.

定理 3 絶対収束

$\int_a^\infty |f(x)| dx$ が収束するならば, $\int_a^\infty f(x) dx$ も収束する. (このとき絶対収束するという. 証明は省略する.)

例題 2

次の広義積分の収束・発散を判定せよ.

$$(1) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad (2) \int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad (3) \int_2^\infty \frac{1}{\log x} dx \quad (4) \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

【解答】(1) $0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{x^{3/2}}$ で, 定理 1 より $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ は収束 ($p = \frac{3}{2} > 1$). よって収束する.

(2) $[0, 1]$ の部分はふつうの定積分. $x \geq 1$ では $x^2 \geq x$ より $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$ で, $\int_1^\infty e^{-x} dx$ は収束する. よって収束する.

(3) $x \geq 2$ では $\log x < x$ より $\frac{1}{\log x} > \frac{1}{x} > 0$ で, $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ は発散する. よって発散する.

(4) $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ で, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ は収束. よって絶対収束し, 定理 3 より収束する.

注意

定理 3 の逆は成り立たない. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束する (練習問題 7) が, $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散することが知られている. このように, 収束するが絶対収束しないことを条件収束という.

■ 3. ガンマ関数とガウス積分

広義積分を使って定義される、とても重要な関数を紹介しよう。

定義 3 ガンマ関数

$s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

と定め、**ガンマ関数**という。

この広義積分は、0 の近くと ∞ の方の両方に注意が必要である。 $0 < x \leq 1$ では $0 < x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s-1} = \frac{1}{x^{1-s}}$ で、 $1-s < 1$ なので定理 1 (2) と比較判定法 (定理 2) より収束する。 $x \rightarrow \infty$ では、 $x^{s+1} e^{-x} \rightarrow 0$ (指数関数はどんなべき関数よりも速く大きくなる。第 1 章 No.4 例題 3 (2) と同様) なので、十分大きな x で $x^{s-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$ となり、定理 2 より収束する。

定理 4 ガンマ関数の性質

- (1) $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$ ($s > 0$)
- (2) $\Gamma(1) = 1$, したがって自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$

【証明】 (1) 部分積分 ($f = x^s$, $g' = e^{-x}$) より

$$\int_{\varepsilon}^R x^s e^{-x} dx = \left[-x^s e^{-x} \right]_{\varepsilon}^R + s \int_{\varepsilon}^R x^{s-1} e^{-x} dx.$$

$s > 0$ なので $\varepsilon^s e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$, また $R^s e^{-R} \rightarrow 0$. $\varepsilon \rightarrow +0$, $R \rightarrow \infty$ として $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$.

(2) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ (例 1 (4)). (1) をくり返し使うと $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = \cdots = n! \Gamma(1) = n!$.

□

ガンマ関数は「階乗 $n!$ を、自然数以外の s にまで自然に広げたもの」と見ることができる。

定理 5 ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

e^{-x^2} の原始関数は初等関数で書けない (No.1 コラム) ので、この値は 1 変数の積分の計算だけでは求められない。「2 乗して 2 重積分にし、極座標に変数変換する」という見事な方法で証明される。これは第 4 章 No.3 で扱う。ここでは結果を認めて使う。

例題 3

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を示し、 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ を求めよ。

【解答】 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ で、 $x = t^2$ ($t > 0$) と置換すると $dx = 2t dt$ なので

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t^2} \cdot 2t dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(最後は、 e^{-t^2} が偶関数なので $\int_0^{\infty} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}$ と定理 5 を使った。広義積分での置換は、 $[\varepsilon, R]$ で置換して

から極限をとれば正当化できる.) 定理 4 (1) より $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

コラム：広義積分はいろいろな分野の主役

- 正規分布の確率密度関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ の全体の積分が 1 になることは、ガウス積分そのものである (分野「確率・統計」第 2 章 No.4).
- $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ という広義積分で定義されるラプラス変換は、微分方程式を代数の問題に変える道具である (分野「微分方程式」第 5 章 No.1).
- $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ のように、実数の範囲では計算しにくい広義積分が、複素数を使うと鮮やかに求まることがある (分野「複素関数論」第 5 章 No.3).

■ 練習問題

発展 のついた問題は、この回の内容から一步踏み出した発展問題である. 最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい.

1. 次の広義積分を求めよ.

$$(1) \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx \quad (2) \int_0^\infty xe^{-x} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(4) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5) \int_0^\infty \frac{1}{x^2+4} dx \quad (6) \int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

2. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ. (4) は収束するなら値も求めよ ($x = \sin^2 t$ と置換する).

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (2) \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \quad (3) \int_1^\infty \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad (4) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

3. 次の広義積分を求めよ.

$$(1) \int_0^\infty e^{-ax} dx \quad (a > 0) \quad (2) \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$$

4. 次の値を求めよ.

$$(1) \Gamma(5) \quad (2) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \quad (3) \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$$

5. 定理 5 を使って, $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ を求めよ. (ヒント: $x^2 e^{-x^2} = x \cdot x e^{-x^2}$ として部分積分.)

6. $\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^p} dx$ が収束するような p の範囲を求めよ.

7. **発展** (考えてみよう) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が収束することを示せ. (ヒント: $\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx$ を部分積分して $\int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx$ の形を作り, 例題 2 (4) と同じように考える.)

■ 練習問題の解答

1. (1) 定理 1 (1) で $p = 3$ として $\frac{1}{2}$.
 (2) 部分積分で $\left[-xe^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0 + 1 = 1$. ($\Gamma(2) = 1! = 1$ でもある.)
 (3) 定理 1 (2) で $p = \frac{1}{3}$ として $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. (4) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\arcsin \frac{x}{2}\right]_0^{2-\varepsilon} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
 (5) $\left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. (6) $\left[-\frac{1}{\log x}\right]_e^{\infty} = 0 - (-1) = 1$.
2. (1) 定理 1 (2) で $p = 2 \geq 1$ なので発散.
 (2) $0 < \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$ で, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ が収束するので収束.
 (3) $\int_1^R \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \log \frac{R^2 + 1}{2} \rightarrow \infty$ なので発散. ($x \geq 1$ で $\frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$ と比較してもよい.)
 (4) 両端で発散する. $x = \sin^2 t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) とおくと $dx = 2 \sin t \cos t dt$, $\sqrt{x(1-x)} = \sin t \cos t$ なので $\int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} 2 dt = \pi$. 収束して値は π .
3. (1) $\left[-\frac{1}{a} e^{-ax}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}$.
 (2) No.3 例題 4 と同様に部分積分を 2 回使うと $\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} + C$. $R \rightarrow \infty$ で $e^{-R}(\sin R + \cos R) \rightarrow 0$ ($|\sin R + \cos R| \leq 2$) なので, 値は $0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
4. (1) $\Gamma(5) = 4! = 24$. (2) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$. (3) $\Gamma(4) = 3! = 6$.
5. $f = x$, $g' = xe^{-x^2}$ ($g = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$) として部分積分すると

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \left[-\frac{x}{2} e^{-x^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

6. $t = \log x$ とおくと $dt = \frac{dx}{x}$, t は $\log 2 \rightarrow \infty$. $\int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}$ となり, 定理 1 (1) と同様に (下端が 1 でなく $\log 2 > 0$ でも収束・発散は変わらない), $p > 1$ のとき収束, $p \leq 1$ のとき発散. ($\frac{1}{x \log x}$ は $\frac{1}{x}$ より「ほんの少しだけ」速く 0 に近づくが, それでも発散する.)

7. $f = \frac{1}{x}$, $g' = \sin x$ として部分積分すると

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

$R \rightarrow \infty$ のとき $\left|\frac{\cos R}{R}\right| \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0$. また $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ より $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ は絶対収束するので収束する (定理 3). よって右辺は $R \rightarrow \infty$ で収束し, $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は収束する.