大学数学のアトリエ｜微分積分　第 3 章　偏微分

No.1　多変数関数と偏微分

この回のゴール

- 2 変数関数のグラフと等高線をイメージできる．
- 2 変数関数の極限は「近づき方」が無数にあることを理解し，極限が存在しないことを示せる．
- 偏微分係数を定義し，その図形的な意味（断面の接線の傾き）を説明できる．
- 高次偏導関数を計算し，偏微分の順序交換（シュワルツの定理）を使える．

■ 1. 多変数関数

第 1 章・第 2 章では，1 つの変数 x で決まる関数 $y = f(x)$ を扱ってきた．しかし，たとえば長方形の面積 $S = xy$ は縦 x と横 y の 2 つで決まり，気温は場所（緯度・経度）と時刻で決まる．この章では，このように**いくつかの変数で決まる関数**の微分を学ぶ．

定義 1　2 変数関数

平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D の各点 (x, y) に，実数 z を 1 つずつ対応させる規則を **2 変数関数**といい，$z = f(x, y)$ と書く．D を**定義域**という．空間の点 $(x, y, f(x, y))$ 全体を f の**グラフ**といい，ふつうは曲面になる．

3 変数関数 $w = f(x, y, z)$ なども同様に定める．以下では主に 2 変数で説明するが，考え方は変数がいくつあっても同じである．

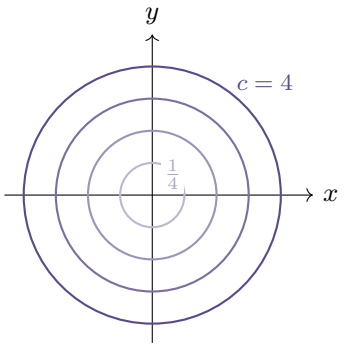
曲面は紙に描きにくいので，「高さ $f(x, y) = c$ となる点の集まり」を平面に描くことが多い．これを**等高線**という（地図の等高線と同じ）．

例 1

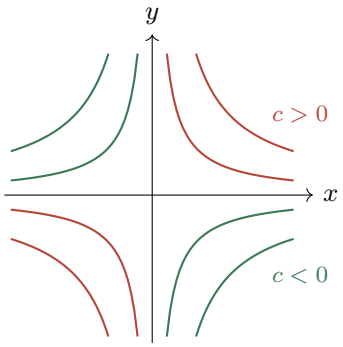
(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ のグラフは，お椀を上向きに置いた形の曲面（回転放物面）である．等高線 $x^2 + y^2 = c$（$c > 0$）は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の円である．

(2) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の定義域は $x^2 + y^2 \leq 1$ で，グラフは半径 1 の上半球面である．

(3) $f(x, y) = xy$ の等高線 $xy = c$ は双曲線（$c \neq 0$）と，2 本の座標軸（$c = 0$）である．



$x^2 + y^2 = c$



$xy = c$

■ 2. 2 変数関数の極限と連続性

点 (x, y) と点 (a, b) の距離は $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ である．「(x, y) が (a, b) に近づく」とは，この距離が 0 に近づくことと考える．

定義 2　2 変数関数の極限・連続

- 点 (x, y) が (a, b) と異なる点をとりながら，**どのような近づき方で** (a, b) に近づいても，$f(x, y)$ が一定の値 α に近づくとき，$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \alpha$ と書く．
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ のとき，f は (a, b) で**連続**であるという．

1 変数では，x が a に近づく方向は「右から」と「左から」の 2 通りしかなかった（第 1 章 No.1 定理 1）．2 変数では，まっすぐ近づく方向だけでも無数にあり，曲がりながら近づくこともできる．このことが 2 変数の極限をずっと難しくしている．（四則演算やはさみうちの原理は，1 変数と同じように成り立つ．）

例 2　極限が存在しない例

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ を考える．直線 $y = mx$ に沿って原点に近づけると，$x \neq 0$ で

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

となり，m によって値が違う（$m = 0$ なら 0，$m = 1$ なら $\frac{1}{2}$）．近づき方で行き先が変わるので，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ は存在しない．

例題 1

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ を示せ．

【解答】 **極座標** $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$（$r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$）を使うと

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{r^3|\cos^2\theta\sin\theta|}{r^2} = r\,|\cos^2\theta\sin\theta| \leq r.$$

右辺の r は θ に関係なく，$(x, y) \to (0, 0)$ のとき 0 に近づく．はさみうちの原理より極限は 0.

注意

- 極座標を使うときは，例題 1 のように θ **によらない**評価（$\leq r$ など）を作ることが大切である．θ を固定して $r \to 0$ とするだけでは，直線に沿った近づき方しか調べていない．
- 実際，**すべての直線に沿った極限が一致しても，極限が存在するとは限らない**．放物線に沿うと違う値になる例がある（練習問題 7）．

■ 3. 偏微分

2 変数関数を微分するいちばん素直な方法は，「片方の変数を止めて，もう片方だけを動かす」ことである．

定義 3　偏微分係数・偏導関数

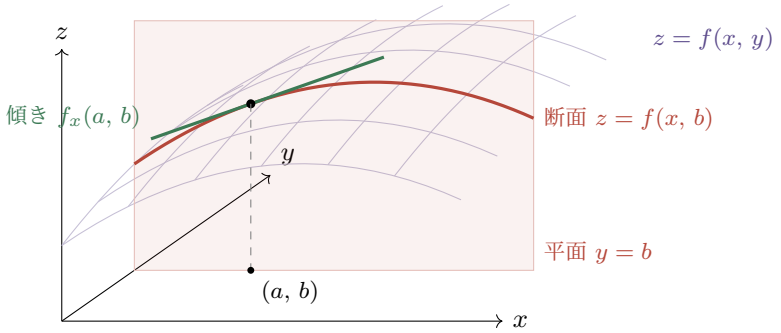
$y = b$ に固定して x だけの関数 $x \mapsto f(x, b)$ と見たときの $x = a$ での微分係数

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

を，f の (a, b) における x **についての偏微分係数**という．存在するとき，f は (a, b) で x **について偏微分可能**であるという．y についての偏微分係数 $f_y(a, b) = \lim_{k \to 0} \dfrac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$ も同様に定める．(x, y) に $f_x(x, y)$ を対応させる関数を**偏導関数**といい，次のようにも書く．

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \partial_x f, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \partial_y f.$$

∂ は「ラウンド・ディー」「デル」などと読む．1 変数の $\dfrac{d}{dx}$ と区別するための記号である．本によっては f_x を $D_1 f$ と書く．



図形的には，曲面 $z = f(x, y)$ を平面 $y = b$ で切った断面の曲線 $z = f(x, b)$ について，$x = a$ での接線の傾きが $f_x(a, b)$ である．$f_y(a, b)$ は，平面 $x = a$ で切った断面の接線の傾きである．

計算するときは，**他の変数を定数とみなして** 1 変数のときと同じように微分すればよい．

例 3

$f(x, y) = x^2 y + \sin(xy)$ のとき，

$$f_x = 2xy + y\cos(xy), \qquad f_y = x^2 + x\cos(xy).$$

（f_x を求めるときは y を定数とみなすので，$\sin(xy)$ の x での微分は $\cos(xy) \cdot y$ となる．）

偏微分可能でも連続とは限らない

1 変数では「微分可能ならば連続」だった（第 1 章 No.2 定理 2）．2 変数ではこれが成り立たない．例 2 の関数で $f(0, 0) = 0$ と定めると，$f(x, 0) = 0$，$f(0, y) = 0$ なので $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ と偏微分可能だが，原点で極限をもたないので連続でない（練習問題 5）．偏微分は x 軸方向と y 軸方向の 2 方向しか見ていないからである．「すべての方向をまとめて見た」本当の意味での微分可能性が，No.2 の**全微分**である．

■ 4. 高次偏導関数

偏導関数をさらに偏微分したものを **2 次偏導関数**という．2 変数では 4 つある．

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad f_{xy}=(f_x)_y=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\qquad f_{yx}=(f_y)_x=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

f_{xy} は「先に x，次に y で偏微分」を表す．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ では右から順に読むので，順番が逆に見えることに注意しよう．（本によっては f_{xy} の添字の順番の約束が逆のこともある．）

定義 4　C^n 級

f の n 次までのすべての偏導関数が存在して連続であるとき，f は C^n **級**であるという．何回でも偏微分できるとき C^∞ **級**という．

定理 1　シュワルツの定理

f_{xy} と f_{yx} が**ともに存在して連続**ならば，$f_{xy}=f_{yx}$ である．特に，f **が** C^2 **級**ならば偏微分の順序は交換できる．（証明は教科書に任せる．クレローの定理，ヤングの定理などとも呼ばれる．）

例 4

$f(x,\,y)=x^3y^2+e^{xy}$ とすると

$$f_x=3x^2y^2+ye^{xy},\qquad f_y=2x^3y+xe^{xy},$$
$$f_{xy}=6x^2y+e^{xy}+xye^{xy},\qquad f_{yx}=6x^2y+e^{xy}+xye^{xy}.$$

確かに $f_{xy}=f_{yx}$ となっている．

コラム：順序を交換できない関数

$f(x,\,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ $((x,\,y)\neq(0,\,0))$，$f(0,\,0)=0$ とすると，$f_{xy}(0,\,0)=-1$，$f_{yx}(0,\,0)=1$ となり，順序を交換すると値が変わってしまう．この関数では，2 次偏導関数が原点で連続でない．シュワルツの定理の「連続」という仮定は，飾りではないのである．ふだん扱う関数（多項式・指数・三角関数などの組み合わせ）は定義域の内部で C^∞ 級なので，安心して順序を交換してよい．

■ 練習問題

1. 次の関数の偏導関数 f_x，f_y を求めよ．

(1) $x^3-2xy^2+y^4$　(2) e^{2x-3y}　(3) $\log(x^2+y^2)$　(4) $\arctan\dfrac{y}{x}$ $(x\neq0)$　(5) x^y $(x>0)$

2. 3 変数関数 $f(x,\,y,\,z)=xyz+x^2z^3$ の偏導関数 f_x，f_y，f_z を求めよ．

3. 次の極限が存在するか調べ，存在するならその値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. $f(x,\,y)=x^2y^3+\sin(x+2y)$ の 2 次偏導関数をすべて求め，$f_{xy}=f_{yx}$ を確かめよ．

5. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$，$f(0, 0) = 0$ とする．$f_x(0, 0)$，$f_y(0, 0)$ が存在することを示し，それでも f は原点で連続でないことを説明せよ．

6. $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ は $f_{xx} + f_{yy} = 0$ を満たすことを示せ．（この方程式を**ラプラス方程式**といい，分野「微分方程式」第 6 章 No.3 で扱う．）

7.（考えてみよう）$g(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ とする．

(a) 原点を通るどの直線（$y = mx$ および $x = 0$）に沿って原点に近づけても，g は 0 に近づくことを示せ．

(b) 放物線 $y = x^2$ に沿って原点に近づけると，g はいくつに近づくか．

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ は存在するか．

■ 練習問題の解答

1. (1) $f_x = 3x^2 - 2y^2$, $f_y = -4xy + 4y^3$.
(2) $f_x = 2e^{2x-3y}$, $f_y = -3e^{2x-3y}$.
(3) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.
(4) $f_x = \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.
(5) y を定数とみると x^y は x のべき関数なので $f_x = yx^{y-1}$. x を定数とみると指数関数なので $f_y = x^y \log x$.

2. $f_x = yz + 2xz^3$, $f_y = xz$, $f_z = xy + 3x^2z^2$.

3. (1) 存在しない. $y = 0$ に沿うと 1, $x = 0$ に沿うと -1 で，近づき方によって値が違う.
(2) 0. 極座標で $\left|\dfrac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{r^2}\right| \le r(|\cos\theta|^3 + |\sin\theta|^3) \le 2r \to 0$.
(3) 0. $\left|\dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}\right| \le r \to 0$.

4. $f_x = 2xy^3 + \cos(x+2y)$, $f_y = 3x^2y^2 + 2\cos(x+2y)$ より

$$f_{xx} = 2y^3 - \sin(x+2y), \qquad f_{xy} = 6xy^2 - 2\sin(x+2y),$$
$$f_{yx} = 6xy^2 - 2\sin(x+2y), \qquad f_{yy} = 6x^2y - 4\sin(x+2y).$$

5. $f(h, 0) = 0$ なので $f_x(0, 0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$. 同様に $f_y(0, 0) = 0$. 一方，例 2 より直線 $y = x$ に沿うと $f \to \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ なので，原点で連続でない.

6. $f = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ より $f_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f_{xx} = \dfrac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. 対称性から $f_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. 足すと 0.

7. (a) $y = mx$ に沿うと $g(x, mx) = \dfrac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \dfrac{mx}{x^2+m^2} \to 0$ ($m \neq 0$ のときは分母 $\to m^2$; $m = 0$ なら $g = 0$). $x = 0$ に沿うと $g(0, y) = 0$.
(b) $g(x, x^2) = \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2}$ なので $\dfrac{1}{2}$ に近づく.
(c) 直線に沿うと 0，放物線に沿うと $\frac{1}{2}$ で行き先が異なるので，存在しない.