

No.2 全微分

この回のゴール

- 全微分可能性を「1次近似できること」として定義し、偏微分可能性との違いを説明できる。
- 「 C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 連続かつ偏微分可能」の関係と、逆が成り立たない例を挙げられる。
- 接平面の方程式を求め、全微分 $dz = f_x dx + f_y dy$ を近似計算に使える。
- 方向微分係数と勾配ベクトル ∇f を計算し、その意味を説明できる。

■ 1. 全微分可能性

No.1 で見たように、偏微分可能であっても連続とは限らない。偏微分は x 軸方向と y 軸方向しか見ていないからである。そこで、1変数の「微分可能 = 1次近似できる」(第1章 No.2 定理3) という見方を、2変数にそのまま持ち込む。

定義 1 全微分可能

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるとは、ある定数 A, B があって

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

と書けることをいう。つまり、 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0.$$

本によっては、これを単に「 f は (a, b) で微分可能」という。

「 (a, b) の近くでは、 f は1次式 $f(a, b) + Ah + Bk$ でよく近似でき、誤差は距離 $\sqrt{h^2 + k^2}$ よりずっと速く0になる」という意味である。近づく方向を限定していないところが、偏微分との違いである。

定理 1

f が (a, b) で全微分可能ならば、

- (1) f は (a, b) で連続である。
- (2) f は (a, b) で偏微分可能で、 $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$ である。

【証明】(1) 定義の式で $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とすると、右辺は $f(a, b)$ に近づく。

(2) 定義の式で $k = 0$ とすると $f(a+h, b) = f(a, b) + Ah + \varepsilon(h, 0)|h|$ 。 h で割って $\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A + \varepsilon(h, 0) \rightarrow A$ 。 よって $f_x(a, b) = A$ 。 B も同様。 □

したがって、全微分可能なときの1次近似は

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

と、偏微分係数を使って書ける。

例題 1 連続で偏微分可能だが、全微分可能でない例

$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$), $f(0, 0) = 0$ とする. f は原点で連続かつ偏微分可能だが、全微分可能でないことを示せ.

【解答】 連続性: No.1 練習問題 3 (3) より $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0, 0)$. 偏微分: $f(h, 0) = 0$, $f(0, k) = 0$ より $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. 全微分可能なら定理 1 より $A = B = 0$ のはずなので,

$$\frac{f(h, k) - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

が 0 に近づかなければならない. しかしこれは No.1 例 2 の関数で, $k = h$ に沿うと $\frac{1}{2}$ に近づく. よって全微分可能でない.

偏導関数が連続であれば、全微分可能性が保証される. 実用上はこれがいちばん使いやすい判定法である.

定理 2

f_x, f_y が (a, b) の近くで存在し, (a, b) で連続ならば, f は (a, b) で全微分可能である. 特に C^1 級の関数は全微分可能である.

【証明】 x 方向と y 方向に 1 回ずつ動かすように分ける.

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \{f(a + h, b + k) - f(a, b + k)\} + \{f(a, b + k) - f(a, b)\}.$$

それぞれに 1 変数の平均値の定理 (第 1 章 No.4 定理 3) を使うと, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ があって

$$= f_x(a + \theta_1 h, b + k)h + f_y(a, b + \theta_2 k)k.$$

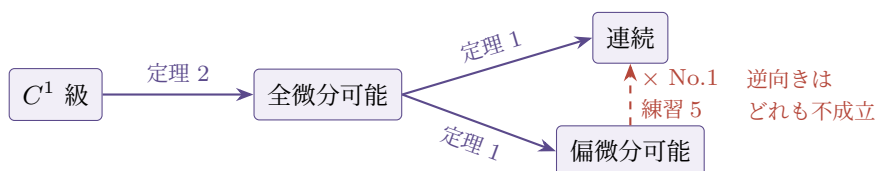
$\varepsilon_1 = f_x(a + \theta_1 h, b + k) - f_x(a, b)$, $\varepsilon_2 = f_y(a, b + \theta_2 k) - f_y(a, b)$ とおくと, 偏導関数の連続性より $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ で $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

$$\frac{|f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{|\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \rightarrow 0.$$

($|h|, |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$ を使った.)

□

ここまでの関係を図にまとめておこう.



(「全微分可能だが C^1 級でない」例もある: 1 変数の第 1 章 No.3 練習問題 7 の $x^2 \sin \frac{1}{x}$ を 2 変数で考えればよい.)

■ 2. 接平面と全微分

1 次近似の式で $x = a + h$, $y = b + k$ とおくと, (a, b) の近くで曲面 $z = f(x, y)$ は平面

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

とほとんど同じになる. これは 1 変数の接線 (第 1 章 No.2 定義 2) の 2 変数版である.

定義 2 接平面

f が (a, b) で全微分可能なとき, 上の平面を, 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ における**接平面**という. ベクトル $(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ はこの平面に垂直で, **法線ベクトル**という.

例 1

$z = x^2 + y^2$ の点 $(1, 2, 5)$ における接平面は, $f_x = 2x = 2$, $f_y = 2y = 4$ より $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$, すなわち $z = 2x + 4y - 5$.

x, y の微小な変化を dx, dy と書くと, z の変化は 1 次近似で $f_x dx + f_y dy$ となる. これを記号で表したのが全微分である.

定義 3 全微分

全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

を z の**全微分**という.

例題 2 近似値

$(1.02)^{2.01}$ の近似値を全微分を使って求めよ.

【解答】 $f(x, y) = x^y$ とすると $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \log x$. $(1, 2)$ では $f = 1$, $f_x = 2$, $f_y = 0$. $dx = 0.02$, $dy = 0.01$ として

$$(1.02)^{2.01} \approx 1 + 2 \times 0.02 + 0 \times 0.01 = 1.04.$$

(実際は $1.0406 \dots$.)

例 2 誤差の伝わり方

円柱の体積 $V = \pi r^2 h$ の全微分は $dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$. 両辺を V で割ると

$$\frac{dV}{V} = 2 \frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}.$$

半径と高さの測定値にそれぞれ 1% の誤差があると, 体積にはおよそ $2 + 1 = 3\%$ までの誤差が生じる. 半径の誤差が 2 倍効いてくる.

■ 3. 方向微分と勾配

偏微分は x 軸方向, y 軸方向の変化率だった. 任意の方向の変化率を考えよう.

定義 4 方向微分係数

単位ベクトル $\mathbf{u} = {}^t(u_1, u_2)$ ($u_1^2 + u_2^2 = 1$) に対して,

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t}$$

を, f の (a, b) における $\mathbf{u}$ 方向の**方向微分係数**という. $\mathbf{u} = {}^t(1, 0)$ なら f_x , $\mathbf{u} = {}^t(0, 1)$ なら f_y である.

定義 5 勾配

$\nabla f(a, b) = {}^t(f_x(a, b), f_y(a, b))$ を f の (a, b) における**勾配** (勾配ベクトル) という. $\text{grad } f$ とも書く. ∇ は「ナブラ」と読む.

定理 3

f が (a, b) で**全微分可能**ならば, すべての単位ベクトル $\mathbf{u}$ について

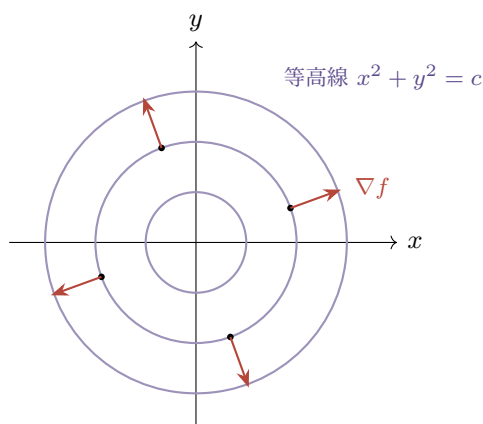
$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2 = (\nabla f(a, b), \mathbf{u}).$$

ここで $(\cdot, \cdot)$ は標準内積 (分野「線形代数」第7章 No.1) である.

【証明】 全微分可能性の定義で $h = tu_1$, $k = tu_2$ とおくと, $\sqrt{h^2 + k^2} = |t|$ なので $f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b) = t(f_x u_1 + f_y u_2) + \varepsilon |t|$. t で割って $t \rightarrow 0$ とすればよい. $\square$

∇f と $\mathbf{u}$ のなす角を φ とすると, $(\nabla f, \mathbf{u}) = \|\nabla f\| \cos \varphi$ ($\|\mathbf{u}\| = 1$) である. したがって:

- 方向微分係数は, $\mathbf{u}$ が ∇f と同じ向き ($\varphi = 0$) のとき最大で, その値は $\|\nabla f\|$. つまり**勾配**は f が最も急に増える方向を向いている.
- $\mathbf{u} \perp \nabla f$ のとき方向微分係数は 0. つまり ($\nabla f \neq \mathbf{0}$ のとき) 勾配は**等高線に垂直**である (等高線の方法には高さが変わらない). $\nabla f = \mathbf{0}$ となる点では, 等高線が 1 本の滑らかな曲線にならないこともある (No.3 第3節, No.5 の鞍点を参照).



例 3

$f(x, y) = x^2 + y^2$ のとき $\nabla f = {}^t(2x, 2y)$ で、原点から外向き（等高線の円に垂直）である． $(1, 1)$ では $\nabla f = {}^t(2, 2)$ なので、最も急に増える方向は $\frac{1}{\sqrt{2}} {}^t(1, 1)$ 、そのときの変化率は $\|\nabla f\| = 2\sqrt{2}$ ．

コラム：勾配をたどって山を下る

「勾配の逆向き $-\nabla f$ に少しずつ進めば、 f の値は最も速く減る」。この単純な考え方が**勾配降下法**で、機械学習でパラメータを調整するときの基本的なアルゴリズムになっている（分野「最適化」第4章 No.1）。また、勾配はベクトル場の基本的な演算の1つとして、分野「ベクトル解析」第2章 No.1 で再び登場する。

■ 練習問題

1. 次の関数の全微分 dz を求めよ．

$$(1) z = x^2 y^3 \quad (2) z = e^x \cos y \quad (3) z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

2. 次の曲面の、指定された点における接平面の方程式を求めよ．

$$(1) z = xy \text{ 点 } (2, 3, 6) \quad (2) z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \text{ 点 } (1, 2, 2)$$

3. 全微分を使って、 $\sqrt{(3.02)^2 + (3.97)^2}$ の近似値を求めよ．

4. $f(x, y) = x^2 y$ について、点 $(1, 2)$ における $\boldsymbol{u} = \frac{1}{5} {}^t(3, 4)$ 方向の方向微分係数を求めよ．また、この点で f が最も急に増える方向と、そのときの変化率を求めよ．

5. $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ は、原点で $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ であるが、全微分可能でないことを示せ．

6. 円柱の半径を 1% 大きく、高さを 2% 小さく測ってしまったとき、体積の相対誤差はおおよそ何 % か（例 2 を使え）．

7. **発展**（考えてみよう）No.1 練習問題 7 の関数 $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)), g(0, 0) = 0$ について、原点における**すべての方向**の方向微分係数が存在することを示せ．それにもかかわらず g が原点で全微分可能でない理由を説明せよ．

■ 練習問題の解答

1. (1) $dz = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$. (2) $dz = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$. (3) $dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
2. (1) $f_x = y = 3$, $f_y = x = 2$ より $z = 6 + 3(x - 2) + 2(y - 3)$, すなわち $z = 3x + 2y - 6$.
 (2) $f_x = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -\frac{1}{2}$, $f_y = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -1$ より $z = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - (y - 2)$, 整理して $x + 2y + 2z = 9$. (球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ の接平面は, 半径の方向 ${}^t(1, 2, 2)$ に垂直になっている.)
3. $f = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4)$ で $f = 5$, $f_x = \frac{3}{5}$, $f_y = \frac{4}{5}$. $dx = 0.02$, $dy = -0.03$ として $5 + 0.6 \times 0.02 + 0.8 \times (-0.03) = 4.988$. (実際は $4.98811 \dots$.)
4. $\nabla f = {}^t(2xy, x^2) = {}^t(4, 1)$. $D_{\mathbf{u}}f = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$. 最も急に増える方向は $\frac{1}{\sqrt{17}} {}^t(4, 1)$, 変化率は $\|\nabla f\| = \sqrt{17}$.
5. $f(h, 0) = f(0, k) = 0$ より $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. 全微分可能なら $\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0$ のはずだが, $k = h$ に沿うと $\frac{|h|}{\sqrt{2}|h|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のまま. よって全微分可能でない.
6. $\frac{dV}{V} = 2 \times (+1\%) + (-2\%) = 0\%$. 誤差が打ち消し合い, 体積の相対誤差はほぼ 0% .
7. $\mathbf{u} = {}^t(u_1, u_2)$ とする. $u_2 \neq 0$ のとき

$$\frac{g(tu_1, tu_2) - 0}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \rightarrow \frac{u_1^2}{u_2} \quad (t \rightarrow 0).$$

$u_2 = 0$ のときは $g(tu_1, 0) = 0$ で 0 . よってすべての方向の方向微分係数が存在する. しかし No.1 練習問題 7 より g は原点で連続でないので, 定理 1 (1) より全微分可能でない. (また, 全微分可能なら定理 3 より $D_{\mathbf{u}}g = (\nabla g, \mathbf{u})$ は $\mathbf{u}$ の 1 次式になるはずだが, $\frac{u_1^2}{u_2}$ はそうになっていない. 「すべての方向に微分できる」ことと「全微分可能」は違うのである.)