

No.3 合成関数の偏微分

この回のゴール

- 曲線に沿った合成関数の微分 $\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$ を導き、使える.
- 変数変換 (特に極座標) による偏微分の書きかえができ, それを行列の積として理解できる.
- 陰関数定理を述べ, 陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ を計算できる.

■ 1. 曲線に沿った微分

点 (x, y) が時刻 t とともに平面上の曲線 $x = x(t)$, $y = y(t)$ を動くとき, その点での「高さ」 $z = f(x(t), y(t))$ は t の関数になる. この変化率を求めよう. 1変数の合成関数の微分 (第1章 No.3 定理2) の2変数版である.

定理1 合成関数の微分 (1)

$f(x, y)$ が全微分可能 (たとえば C^1 級), $x(t)$, $y(t)$ が微分可能ならば, $z = f(x(t), y(t))$ は t について微分可能で

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

(f_x, f_y は点 $(x(t), y(t))$ での値.)

【証明】 t が Δt 変わるときの x, y の変化を $h = x(t + \Delta t) - x(t)$, $k = y(t + \Delta t) - y(t)$ とする. 全微分可能性 (No.2 定義1) より

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{\Delta t} = f_x \frac{h}{\Delta t} + f_y \frac{k}{\Delta t} + \varepsilon(h, k) \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\Delta t}.$$

$\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\frac{h}{\Delta t} \rightarrow x'(t)$, $\frac{k}{\Delta t} \rightarrow y'(t)$. 最後の項は, $\left| \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\Delta t} \right| \rightarrow \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ (有限) で, $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ より $\varepsilon \rightarrow 0$ なので0に近づく. ($(h, k) = (0, 0)$ となるときは $\varepsilon(0, 0) = 0$ と定めておけばよい.) $\square$

右辺は勾配と速度ベクトルの内積 ($\nabla f, {}^t(x'(t), y'(t))$) になっている. 「高さの変化率 = 勾配・進む速度」と読める.

例1

$z = x^2 y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = 2xy \cdot (-\sin t) + x^2 \cdot \cos t = -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t.$$

($z = \cos^2 t \sin t$ を直接微分しても同じ結果になる.)

注意

定理1は「 f が全微分可能」という仮定が大切である。偏微分可能だけでは成り立たない。たとえば No.1 例2 の関数（原点で0とする）は $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ だが、直線 $x = t, y = t$ に沿うと $f(t, t) = \frac{1}{2} (t \neq 0), f(0, 0) = 0$ で、 $t = 0$ で微分できない（連続ですらない）。

■ 2. 変数変換

$z = f(x, y)$ で、 x, y がさらに別の2変数 u, v の関数になっている場合を考える。 v を止めて u だけを動かせば、 (x, y) は曲線を描くので、定理1がそのまま使える。

定理2 合成関数の微分 (2)

$f(x, y)$ が C^1 級、 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ が偏微分可能ならば、 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ について

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

2つの式をまとめると、行列の積（分野「線形代数」第1章 No.2）の形に書ける。

$$\begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}.$$

右端の行列を、変換 $(u, v) \mapsto (x, y)$ のヤコビ行列という。1変数の「 $\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{du}$ （微分係数の積）」が、多変数では「ヤコビ行列の積」になるのである。ヤコビ行列の行列式は、第4章 No.3 の重積分の変数変換で主役になる。

例題1 極座標

$z = f(x, y)$ (C^1 級) で $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とする。

(1) z_r, z_θ を f_x, f_y で表せ。

(2) $f_x^2 + f_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$ ($r > 0$) を示せ。

【解答】 (1) $x_r = \cos \theta, y_r = \sin \theta, x_\theta = -r \sin \theta, y_\theta = r \cos \theta$ なので、定理2より

$$z_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \quad z_\theta = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta.$$

(2) $\frac{1}{r} z_\theta = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta$ なので

$$z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 = (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta)^2 + (-f_x \sin \theta + f_y \cos \theta)^2 = f_x^2 + f_y^2.$$

(交差項 $\pm 2f_x f_y \sin \theta \cos \theta$ が打ち消し合い、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ が残る.)

$\|\nabla f\|^2$ は座標のとり方によらない量なので、直交座標でも極座標でも（正しく書きかえれば）同じになる、ということである。同様の計算を2階まで行くと、ラプラシアン of 極座標表示

$$f_{xx} + f_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}$$

が得られる（練習問題7）。円形の領域での熱の伝わり方や膜の振動を調べるときに使う（分野「微分方程式」第6章）。

偏微分は逆数にならない

$x = r \cos \theta$ より $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$. 一方 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ より $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta$. 両者の積は $\cos^2 \theta$ で、一般に 1 ではない. $\frac{\partial x}{\partial r}$ は「 θ を止めて」、 $\frac{\partial r}{\partial x}$ は「 y を止めて」の微分で、止めている変数が違うからである. 1 変数の逆関数の微分 (第1章 No.3 定理4) のような「逆数の関係」は、偏微分では成り立たない (ヤコビ行列どうしが逆行列になる、という形で成り立つ).

■ 3. 陰関数

円 $x^2 + y^2 = 1$ は、「 $y = (x \text{ の式})$ 」の形をしていないが、上半分では $y = \sqrt{1 - x^2}$, 下半分では $y = -\sqrt{1 - x^2}$ と、部分ごとに y を x の関数として表せる. このように、方程式 $F(x, y) = 0$ によって間接的に定まる関数を**陰関数**という.

定理 3 陰関数定理

$F(x, y)$ が点 (a, b) の近くで C^1 級で、 $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ とする. このとき、 a を含む開区間で定義された C^1 級の関数 $y = \varphi(x)$ で、

$$\varphi(a) = b, \quad F(x, \varphi(x)) = 0$$

を満たすものが $((a, b)$ の近くで) ただ 1 つ存在し、

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}.$$

【証明】 φ の存在と C^1 級であることの証明は教科書に任せる. それを認めて、 $F(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると、定理 1 ($x = x$, $y = \varphi(x)$) より $F_x + F_y \varphi'(x) = 0$. $F_y \neq 0$ なので結論を得る. $\square$

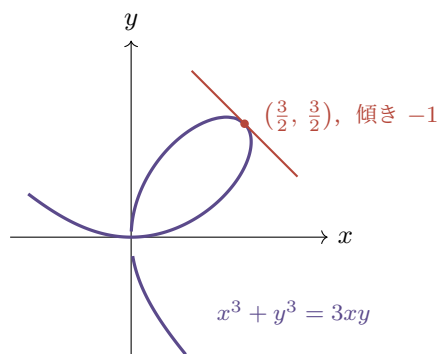
例 2

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき $F_x = 2x$, $F_y = 2y$. $b \neq 0$ となる点の近くでは $y' = -\frac{x}{y}$. $(\pm 1, 0)$ では $F_y = 0$ となり、定理は使えない. 実際、この点の近くでは 1 つの x に y が 2 つ対応してしまい (接線が垂直), y を x の関数として表せない.

例題 2

曲線 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ の点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ における接線の傾きを求めよ.

【解答】 $F = x^3 + y^3 - 3xy$ とすると $F_x = 3x^2 - 3y$, $F_y = 3y^2 - 3x$. 点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ では $F_x = F_y = \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$ ($\neq 0$). よって $y' = -\frac{9/4}{9/4} = -1$.



F が C^1 級で、曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $\nabla F(a, b) \neq \mathbf{0}$ ならば、その点における接線は

$$F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)(y - b) = 0$$

と書ける ($F_y \neq 0$ なら定理 3, $F_x \neq 0$ なら x と y の役割を入れかえた定理 3 による). つまり $\nabla F(a, b)$ は曲線 $F = 0$ に垂直である (No.2 で見た「勾配は等高線に垂直」と同じこと). $\nabla F(a, b) = \mathbf{0}$ のときは、この式は $0 = 0$ となって何も表さない. たとえば $F = x^2 - y^2$ の原点では $\nabla F = \mathbf{0}$ で、実際に曲線 $x^2 = y^2$ は原点で 2 本の直線 $y = \pm x$ が交わっており、接線が 1 本に決まらない.

コラム：3 変数の陰関数と、次の No.5

3 変数でも同様に、 $F(x, y, z) = 0$ で $F_z \neq 0$ なら、 z は (x, y) の関数として表せて $z_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\frac{F_y}{F_z}$ となる. 陰関数定理は、No.5 の「ラグランジュの未定乗数法」(条件付きの極値問題) の裏付けとして再び登場する.

■ 練習問題

1. 定理1を使って $\frac{dz}{dt}$ を求めよ. また, z を t で表してから直接微分した結果と比べよ.

$$(1) z = e^{xy}, \quad x = t^2, \quad y = \frac{1}{t} \quad (2) z = \log(x^2 + y^2), \quad x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$$

2. $z = f(x, y)$ (C^1 級), $x = u + v$, $y = u - v$ のとき, $z_u z_v = f_x^2 - f_y^2$ を示せ.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$ とし, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする. z_r , z_θ を例題1(1)の公式で求め, $z = r^2 \cos 2\theta$ を直接微分した結果と一致することを確認せよ.

4. 次の曲線について, 指定された点での $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$(1) x^2 + xy + y^2 = 3, \quad (1, 1) \quad (2) e^y + xy = e, \quad (0, 1)$$

5. 円 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \neq 0$) について, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$ を示せ.

6. $f(x, y)$ は C^1 級で, すべての $t > 0$ について $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ を満たす (n 次の同次関数) とする. 両辺を t で微分してから $t = 1$ とおくことで, $xf_x + yf_y = nf$ を示せ (オイラーの定理).

7. **発展** (考えてみよう) f が C^2 級で $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$) のとき,

$$f_{xx} + f_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}$$

を示せ. (ヒント: 例題1(1)の z_r , z_θ をもう一度 r , θ で偏微分する. f_x , f_y も r , θ の関数なので, 定理2をもう一度使う.)

■ 練習問題の解答

1. (1) $\frac{dz}{dt} = ye^{xy} \cdot 2t + xe^{xy} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$. $xy = t$ なので $= e^t \left(\frac{2t}{t} - \frac{t^2}{t^2}\right) = e^t$. 直接: $z = e^t$ より $z' = e^t$. 一致する.

(2) $\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2}x' + \frac{2y}{x^2 + y^2}y' = \frac{2(xx' + yy')}{x^2 + y^2}$. $x' = e^t(\cos t - \sin t)$, $y' = e^t(\sin t + \cos t)$ より $xx' + yy' = e^{2t}$, $x^2 + y^2 = e^{2t}$ なので 2. 直接: $z = \log e^{2t} = 2t$ より $z' = 2$.

2. 定理 2 より $z_u = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 1 = f_x + f_y$, $z_v = f_x \cdot 1 + f_y \cdot (-1) = f_x - f_y$. 掛けて $f_x^2 - f_y^2$.

3. $f_x = 2x$, $f_y = -2y$ より $z_r = 2r \cos \theta \cdot \cos \theta - 2r \sin \theta \cdot \sin \theta = 2r \cos 2\theta$, $z_\theta = -2r \cos \theta \cdot r \sin \theta - 2r \sin \theta \cdot r \cos \theta = -2r^2 \sin 2\theta$. 直接: $z = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \cos 2\theta$ より同じ結果.

4. (1) $F = x^2 + xy + y^2 - 3$, $F_x = 2x + y = 3$, $F_y = x + 2y = 3$ より $y' = -1$.

(2) $F = e^y + xy - e$, $F_x = y = 1$, $F_y = e^y + x = e$ より $y' = -\frac{1}{e}$.

5. $y' = -\frac{x}{y}$ をさらに x で微分する (y は x の関数):

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

6. 左辺 $f(tx, ty)$ を t で微分すると, 定理 1 より $f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y$. 右辺は $nt^{n-1}f(x, y)$. $t = 1$ において $xf_x + yf_y = nf$. (例: $f = x^2 + xy$ は $n = 2$ で, $x(2x + y) + y \cdot x = 2(x^2 + xy)$.)

7. 例題 1 (1) より $z_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$. これを r で偏微分する. f_x の r による偏微分は定理 2 より $f_{xx} \cos \theta + f_{xy} \sin \theta$ などとなるので

$$z_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta.$$

次に $z_\theta = r(-f_x \sin \theta + f_y \cos \theta)$ を θ で偏微分する. f_x の θ による偏微分は $f_{xx}(-r \sin \theta) + f_{xy}(r \cos \theta)$ などなので

$$z_{\theta\theta} = r^2(f_{xx} \sin^2 \theta - 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \cos^2 \theta) - r(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta).$$

最後のかっこは z_r なので, $\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = f_{xx} \sin^2 \theta - 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \cos^2 \theta - \frac{1}{r}z_r$. z_{rr} と足すと ($f_{xy} = f_{yx}$ を使った), $z_{rr} + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r}z_r$. 移項すれば結論を得る.