

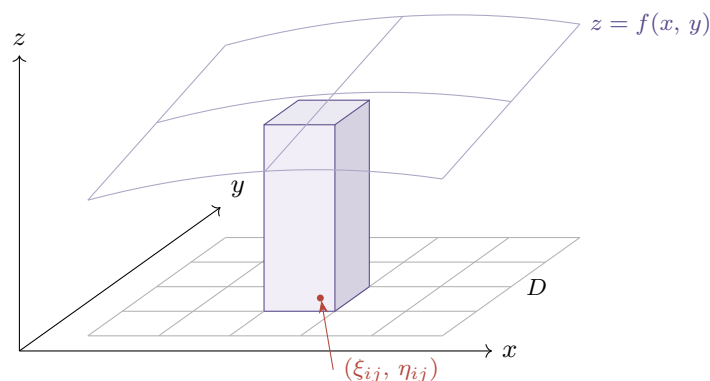
No.1 二重積分

この回のゴール

- 長方形上の二重積分を、リーマン和（細い柱の体積の和）の極限として説明できる.
- 一般の有界な領域での二重積分の定義と、面積 $\iint_D 1 \, dx \, dy$ の意味を理解する.
- 二重積分の基本的な性質（線形性・単調性・領域の加法性・対称性）を使える.
- 簡単な場合に、リーマン和の極限や図形的な意味から二重積分の値を求められる.

■ 1. 長方形上の二重積分

1 変数の定積分 $\int_a^b f(x) \, dx$ は、「細い長方形の面積の和」の極限だった（第 2 章 No.2 定義 1）. 2 変数関数 $z = f(x, y)$ ($f \geq 0$) では、同じことを「細い柱の体積の和」で行う.



定義 1 長方形上の二重積分

長方形 $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ で定義された関数 $f(x, y)$ を考える.

- $[a, b]$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $[c, d]$ を $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ と分割し, D を小さな長方形 $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ に分ける.
- 各 D_{ij} から点 (ξ_{ij}, η_{ij}) を選び, リーマン和 $S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ を作る.
- 小長方形の辺の長さの最大値を 0 に近づけたとき, 分割や点の選び方によらず S が一定の値に近づくならば, f は D で積分可能であるといい, その値を

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

と書いて, f の D における二重積分という.

$f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ は「底面 D_{ij} , 高さ $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ の柱」の体積なので, $f \geq 0$ のとき, 二重積分は曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面の間にある立体の体積を表す. 本によっては $dx \, dy$ の代わりに dA や dS (面積要素) と書く.

定理 1

$f(x, y)$ が長方形 D で連続ならば, f は D で積分可能である. (証明は1変数と同様だが, 教科書に任せる.)

例 1 定義どおりの計算

$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy \, dx \, dy$ を求める. 両辺を n 等分し, 各小正方形の右上の点 $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ を選ぶと

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right) \left(\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j \right) = \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{4}.$$

xy は連続なので積分可能 (定理 1) で, 値は $\frac{1}{4}$. (この計算は「 $\int_0^1 x \, dx \times \int_0^1 y \, dy$ 」になっている. このことは No.2 で一般化する.)

■ 2. 一般の領域での二重積分

円板や三角形のような長方形でない領域でも積分したい. そこで, 領域を長方形で囲み, 外側では関数を 0 とみなす.

定義 2 一般の有界領域での二重積分

有界な集合 D を含む長方形 R をとり,

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}$$

とおく. $\tilde{f}$ が R で積分可能なとき, f は D で積分可能であるといい, $\iint_D f \, dx \, dy = \iint_R \tilde{f} \, dx \, dy$ と定める. 特に $f = 1$ のとき, $|D| = \iint_D 1 \, dx \, dy$ を D の面積という.

$\tilde{f}$ は D の境界で値が跳ぶので, 連続とは限らない. それでも次のような「普通の」領域なら問題なく積分できる.

定理 2

D が有界閉集合で, その境界が有限個の連続な曲線 ($y = \varphi(x)$ や $x = \psi(y)$ の形のグラフ) でできているとする. f が D で連続ならば, f は D で積分可能である. (証明は教科書に任せる.)

この章で扱う円板・三角形・放物線で囲まれた領域などは, すべてこの条件を満たす. 以下では, いちいち断らずに積分可能な場合だけを考える.

■ 3. 二重積分の性質

1 変数の定積分（第 2 章 No.2 定理 2）と同じ性質が成り立つ。

定理 3 二重積分の性質

f, g は D で積分可能とする。

$$(1) \text{ (線形性) } \iint_D (kf + lg) dx dy = k \iint_D f dx dy + l \iint_D g dx dy \quad (k, l \text{ は定数})$$

$$(2) \text{ (単調性) } D \text{ でつねに } f \leq g \text{ ならば } \iint_D f dx dy \leq \iint_D g dx dy$$

$$(3) \text{ (領域の加法性) } D \text{ が, 重なりが面積 0 の 2 つの部分 } D_1, D_2 \text{ に分けられるとき } \iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$$

$$(4) \left| \iint_D f dx dy \right| \leq \iint_D |f| dx dy$$

例 2

$$(1) \text{ 定数関数 } c \text{ の積分は } \iint_D c dx dy = c|D| \text{ (底面積} \times \text{高さ). たとえば } D \text{ が半径 2 の円板なら}$$

$$\iint_D 3 dx dy = 3 \cdot 4\pi = 12\pi.$$

$$(2) \text{ 単調性より, } D \text{ で } m \leq f \leq M \text{ ならば } m|D| \leq \iint_D f dx dy \leq M|D|.$$

1 変数の偶関数・奇関数の積分（第 2 章 No.2 定理 6）と同様に，対称性も役に立つ。

定理 4 対称性

D が y 軸について対称 ($(x, y) \in D$ なら $(-x, y) \in D$) で, f が $f(-x, y) = -f(x, y)$ を満たすならば, $\iint_D f dx dy = 0$. (x 軸についての対称性も同様.)

図形的には, $x > 0$ の部分と $x < 0$ の部分の符号つき体積が打ち消し合う, ということである. (証明は No.2 の累次積分と第 2 章 No.2 定理 6 からすぐ出る.)

例題 1

D を単位円板 $x^2 + y^2 \leq 1$ とする.

$$(1) \iint_D (x + y^3) dx dy \text{ を求めよ.}$$

$$(2) \frac{\pi}{e} \leq \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \pi \text{ を示せ.}$$

【解答】(1) D は y 軸についても x 軸についても対称. x は x について奇関数, y^3 は y について奇関数なので, 定理 4 より積分はどちらも 0. よって 0.

(2) D では $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ なので $e^{-1} \leq e^{-(x^2+y^2)} \leq 1$. $|D| = \pi$ なので, 例 2 (2) より $\frac{\pi}{e} \leq \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \pi$. (実際の値は $\pi(1 - \frac{1}{e}) \approx 1.986$ で, No.3 で求める.)

例題 2 体積として読む

D を単位円板とすると、 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ の値を、図形的な意味から求めよ。

【解答】 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ は半径 1 の上半球面である (第 3 章 No.1 例 1 (2)). したがってこの二重積分は半径 1 の半球の体積で、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{2\pi}{3}$. (No.3 で極座標を使って計算でも確かめる.)

コラム: 「面積をもつ」集合とは?

定義 2 の $\tilde{f}$ が積分可能でないほど境界がぎざぎざな集合も考えられる. たとえば $D = ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^2$ (x, y がともに 0 以上 1 以下の有理数である点全体) では、 $f = 1$ に対する $[0, 1]^2$ 上のリーマン和が、代表点を D の点に選ぶと 1, D にない点に選ぶと 0 になり、極限が定まらない. つまり D は、リーマン積分に基づく面積 (ジョルダンの意味の面積) では面積が定義できない. 一方、分野「解析学」第 8 章で学ぶルベーグ測度では、この D の面積はきちんと定義されて 0 になる (有理数の点は「可算個」しかないため). このように、面積・体積の概念を広げて積分を作り直すのが、測度とルベーグ積分である.

練習問題

1. 例 1 にならって、 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ を $n \times n$ 等分したリーマン和の極限として、次の二重積分を求めよ.

$$(1) \iint_D (x+y) dx dy \quad (2) \iint_D x^2 y dx dy$$

($\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を使ってよい.)

2. D を半径 2 の円板 $x^2 + y^2 \leq 4$ とする. 次の値を求めよ.

$$(1) \iint_D 5 dx dy \quad (2) \iint_D (x^3 + \sin y) dx dy \quad (3) \iint_D (2 + xy) dx dy$$

3. $D = [0, 1] \times [0, 1]$ のとき、 $1 \leq \iint_D e^{xy} dx dy \leq e$ を示せ.

4. 次の二重積分の値を、立体の体積として図形的に求めよ.

$$(1) \iint_D (1-x-y) dx dy \quad (D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1) \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$$

5. $D_1 = [0, 2] \times [0, 1]$, $D_2 = [0, 1] \times [1, 3]$ とし、 $D = D_1 \cup D_2$ (L 字形) とする. 定理 3 (3) を使って $\iint_D 3 dx dy$ を求めよ.

6. (考えてみよう) f は長方形 D で連続で、つねに $f \geq 0$ とする. $\iint_D f dx dy = 0$ ならば、 D のすべての点で $f = 0$ であることを示せ. (ヒント: $f(p) > 0$ となる点 p があったとして、 p の近くの小さな長方形で $f > \frac{1}{2}f(p)$ となることを使う.)

■ 練習問題の解答

$$1. (1) S_n = \sum_{i,j} \left(\frac{i}{n} + \frac{j}{n} \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \left(n \sum_i i + n \sum_j j \right) = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1.$$

$$(2) S_n = \left(\frac{1}{n^3} \sum_i i^2 \right) \left(\frac{1}{n^2} \sum_j j \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \cdot \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$$2. (1) 5 \cdot |D| = 5 \cdot 4\pi = 20\pi.$$

(2) x^3 は x について奇関数, $\sin y$ は y について奇関数で, D は両方の軸について対称. 定理 4 より 0.

(3) xy は x について奇関数なので積分は 0. よって $2 \cdot 4\pi = 8\pi$.

$$3. D \text{ では } 0 \leq xy \leq 1 \text{ なので } 1 \leq e^{xy} \leq e. \quad |D| = 1 \text{ なので, 例 2 (2) より } 1 \leq \iint_D e^{xy} dx dy \leq e.$$

4. (1) $z = 1 - x - y$, $x, y \geq 0$, $z \geq 0$ で囲まれる立体は, 3 辺の長さが 1 の直角四面体 (三角すい).
体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$. (No.2 で累次積分を使って確かめる.)

$$(2) \text{ 半径 } 2 \text{ の半球の体積なので } \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

$$5. D_1 \text{ と } D_2 \text{ は線分 (面積 0) でしか重ならないので, } 3|D_1| + 3|D_2| = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12.$$

6. $f(p) > 0$ となる点 p があったとする. f は連続なので, p を含む (D の中の) 小さな長方形 E で $f > \frac{1}{2}f(p)$ が成り立つ. $f \geq 0$ と定理 3 (2), (3) より

$$\iint_D f dx dy \geq \iint_E f dx dy \geq \frac{1}{2}f(p)|E| > 0$$

となり, 仮定に反する. よってすべての点で $f = 0$. (p が D の辺の上にあっても, D の中に小さな長方形がとれるので同じ議論が使える.)