

No.2 累次積分

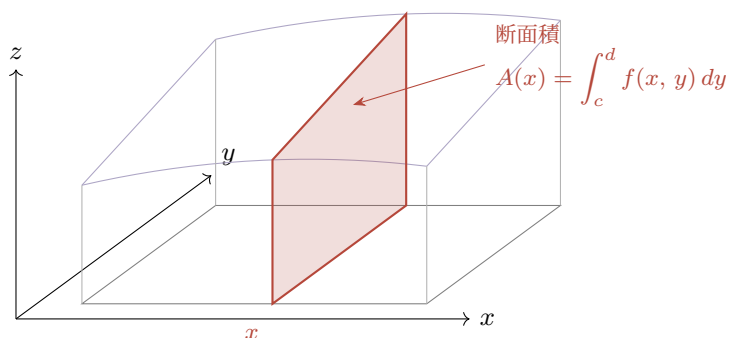
この回のゴール

- 「断面積を積分すると体積」という考え方から、累次積分（フビニの定理）を説明できる。
- 縦線集合・横線集合で表される領域上の二重積分を、累次積分で計算できる。
- 領域の図をかいて、積分の順序を交換できる。
- 二重積分を使って、体積や面積を求められる。

■ 1. 長方形上の累次積分

No.1 の定義どおりにリーマン和の極限を計算するのは大変である。実際には、1 変数の積分を 2 回くり返して計算する。

高校数学IIIで学んだ「立体の体積 = $\int_a^b$ (断面積) dx 」を思い出そう。曲面 $z = f(x, y)$ の下の立体を、 x を固定した平面で切ると、断面積は $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ である。これを x について積分すれば体積、すなわち二重積分が得られるはずである。



定理 1 フビニの定理（長方形）

$f(x, y)$ が長方形 $D = [a, b] \times [c, d]$ で連続ならば、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

(証明は教科書に任せる。)

右辺のように 1 変数の積分をくり返したものを**累次積分**という。内側の $\int_c^d f(x, y) dy$ では x を定数とみなして y で積分する（偏微分の逆の操作）。累次積分は $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ と書くこともある（右側から先に積分する）。

例 1

$D = [0, 1] \times [0, 2]$ のとき,

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 (2x+2) dx = 3.$$

逆の順序でも $\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy = 1 + 2 = 3$ で一致する.

注意

内側の積分の上端・下端に「 $y =$ 」「 $x =$ 」を書いておくと、どの変数に代入するのかを間違えにくい.

定理 2 変数が分離した関数

f が $[a, b]$ で連続, g が $[c, d]$ で連続ならば,

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

【証明】内側の積分 $\int_c^d f(x)g(y) dy = f(x) \int_c^d g(y) dy$ で, $\int_c^d g$ は定数なので外に出せる. □

No.1 例 1 の $\iint_{[0,1]^2} xy dx dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ は, この定理の特別な場合だったのである.

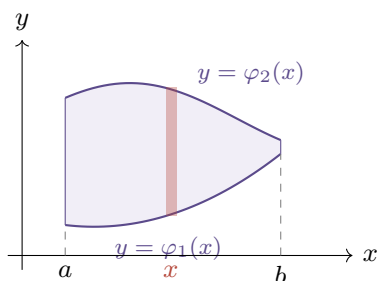
2. 縦線集合・横線集合

定義 1 縦線集合・横線集合

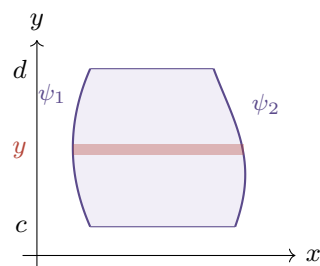
連続関数 $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ を使って

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

と表される集合を縦線集合という. 同様に, $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ と表される集合を横線集合という.



縦線集合: x を固定すると y は $\varphi_1(x)$ から $\varphi_2(x)$



横線集合

定理 3 縦線集合・横線集合上の累次積分

f が D で連続とする.

$$(1) D \text{ が縦線集合なら } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$(2) D \text{ が横線集合なら } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

内側の積分の範囲が、外側の変数によって変わるところが長方形との違いである。「 x を固定したとき、 y はどこからどこまで動くか」を図から読みとることが計算の第一歩になる。

例題 1

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ (三角形) のとき、 $\iint_D xy dx dy$ を求めよ。

【解答】 x を固定すると y は 0 から x まで動く。

$$\int_0^1 \left(\int_0^x xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}.$$

例題 2

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた領域を D とする。 $\iint_D (x + y) dx dy$ を求めよ。

【解答】 交点は $x = 0, 1$ で、 $0 \leq x \leq 1$ では $x^2 \leq x$ 。よって $D = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ 。

$$\int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

■ 3. 積分順序の交換

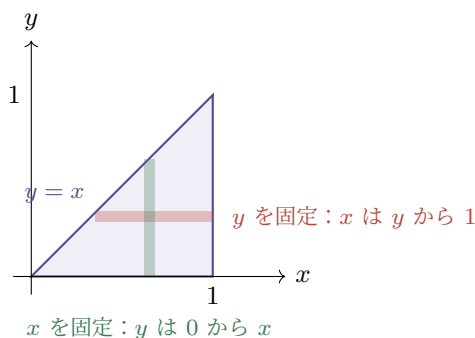
同じ領域が縦線集合としても横線集合としても表せるとき、どちらの順序で積分してもよい。片方の順序では計算できない積分が、順序を変えると計算できることがある。

例題 3

$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$ を求めよ。

【解答】 e^{x^2} の原始関数は初等関数で書けない (第2章 No.1 コラム) ので、このままでは内側が計算できない。積分範囲は $D = \{0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$ で、図をかくと三角形 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ と同じである。縦線集合として積分し直すと

$$\int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$



順序交換のコツ

積分の範囲を不等式で書き出し、必ず**領域の図をかく**。そのうえで、もう一方の変数を固定したときの範囲を図から読みとる。式の上だけで上端・下端を入れかえようとする、ほぼ確実に間違える。

4. 体積と面積

例題 4 四面体の体積

$a, b, c > 0$ とする。平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ と 3 つの座標平面で囲まれた四面体の体積を求めよ。

【解答】 底面 $D = \{x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$ 上で、高さ $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ を積分する。 x を固定すると y は 0 から $b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ まで。 $u = 1 - \frac{x}{a}$ とおくと内側は

$$\int_0^{bu} c \left(u - \frac{y}{b}\right) dy = c \left(bu^2 - \frac{bu^2}{2}\right) = \frac{bc}{2} u^2.$$

よって体積は $\int_0^a \frac{bc}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{bc}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{abc}{6}$. (「底面積 $\frac{ab}{2}$ × 高さ $c \times \frac{1}{3}$ 」という錐の体積の公式と一致する.)

$f = 1$ とすると、縦線集合の面積は $|D| = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx$ となり、高校で学んだ「2 曲線の間の面積」の公式になる。

コラム：順序を変えると値が変わる？

$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ を $[0, 1]^2$ で累次積分してみよう。ただし f は原点で定義されず、原点の近くで有界でもない、これは**広義の累次積分**として解釈する。 $x > 0$ を固定すると、 $f(x, y)$ は $0 \leq y \leq 1$ で連続なので内側の積分はふつうの定積分で、 $\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} = f(x, y)$ より $\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{x^2 + 1}$. $x = 0$ では $f(0, y) = -\frac{1}{y^2}$ で内側の積分が発散するので、外側は ε から積分して $\varepsilon \rightarrow +0$ とする：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}.$$

同じように順序を逆にすると $-\frac{\pi}{4}$ になる ($f(y, x) = -f(x, y)$ だから). f は $[0, 1]^2$ で (広義積分としても) 二重積分可能でないため、フビニの定理の仮定を満たしていないのである。定理の「連続」(あるいは積分可能) という仮定は、ここでも飾りではない。

■ 練習問題

1. 次の二重積分を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,1] \times [0,1]} x e^y dx dy \quad (2) \iint_{[0,\pi/2] \times [0,\pi/2]} \sin(x+y) dx dy \quad (3) \iint_{[1,2] \times [0,1]} x y^2 dx dy$$

2. 次の二重積分を求めよ.

$$(1) \iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$(2) \iint_D y dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \text{ (半円板)}$$

$$(3) \iint_D x dx dy, \quad D \text{ は } y = x^2 \text{ と } y = 2x \text{ で囲まれた領域}$$

3. 積分の順序を交換して, 次の値を求めよ.

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) dy \right) dx$$

4. $\int_0^2 \left(\int_{x/2}^1 f(x, y) dy \right) dx$ を, y を外側にした累次積分に書きかえよ (f は連続とする).

5. 次の体積・面積を求めよ.

- (1) 曲面 $z = 1 - x^2$ と平面 $z = 0, y = 0, y = 2$ で囲まれた立体の体積.
- (2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積 (二重積分で求めよ).

6. **発展** (考えてみよう) 次の2つの累次積分を (原点の近くでは広義積分として) 計算し, 値が異なることを確かめよ. なぜフビニの定理に反しないのかも説明せよ.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy$$

$$(\text{ヒント: } \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{(x+y)^3}.)$$

■ 練習問題の解答

1. (1) 定理2より $\int_0^1 x dx \int_0^1 e^y dy = \frac{1}{2}(e-1)$.
 (2) $\int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x+y) \right]_{x=0}^{x=\pi/2} dy = \int_0^{\pi/2} (\cos y - \cos(y + \frac{\pi}{2})) dy = \int_0^{\pi/2} (\cos y + \sin y) dy = 2$.
 (3) 定理2より $\int_1^2 x dx \int_0^1 y^2 dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.
2. (1) $\int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.
 (2) $D = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. $\int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{2}{3}$.
 (3) 交点は $x=0, 2$ で, $0 \leq x \leq 2$ では $x^2 \leq 2x$. $\int_0^2 x(2x-x^2) dx = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$.
3. 範囲は $\{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. $\int_0^1 \left(\int_0^y \sin(y^2) dx \right) dy = \int_0^1 y \sin(y^2) dy = \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_0^1 = \frac{1-\cos 1}{2}$.
4. 範囲は $\{0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$. 図をかくと, 頂点 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ の三角形で, y を固定すると x は 0 から $2y$ まで. よって $\int_0^1 \left(\int_0^{2y} f(x, y) dx \right) dy$.
5. (1) $\iint_{[-1,1] \times [0,2]} (1-x^2) dx dy = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \cdot 2 = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$.
 (2) 交点は $x=-1, 2$. $\int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 1 dy \right) dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \frac{9}{2}$.
6. 被積分関数 $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ は原点で定義されないで, コラムと同様に広義の累次積分として計算する. $x > 0$ を固定すると $f(x, y)$ は $0 \leq y \leq 1$ で連続で, ヒントより内側の積分は $\left[\frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{(x+1)^2}$. ($x=0$ では $f(0, y) = -\frac{1}{y^2}$ で内側が発散する.) よって1つ目は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

(この場合は $\frac{1}{(x+1)^2}$ が $[0, 1]$ で連続なので, 結果的に $\int_0^1$ としても同じ値になる.) 被積分関数は x と y を入れかえると符号が変わるので, 2つ目は $-\frac{1}{2}$. 被積分関数は原点の近くで有界でなく (たとえば $y=0$ に沿うと $\frac{1}{x^2}$), $[0, 1]^2$ で連続でも積分可能でもないで, フビニの定理 (定理1) の仮定を満たしていない.