

No.3 変数変換

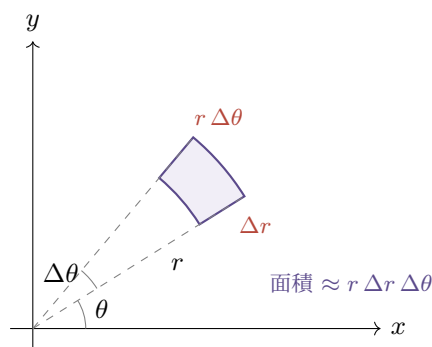
この回のゴール

- 極座標変換 $dx dy = r dr d\theta$ の意味を図で説明し、円形の領域の積分を計算できる.
- ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を、極座標を使って証明できる.
- ヤコビアンを計算し、一般の変数変換の公式 $dx dy = |J| du dv$ を使える.
- ヤコビアンを「面積の拡大率」として、線形代数の行列式と結びつけて理解できる.

■ 1. 極座標による変数変換

円板のような丸い領域では、 x, y で縦線集合として表すと根号が出てきて計算が大変になる. そこで、極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0$) を使って、 r と θ の範囲で領域を表す. たとえば半径 a の円板は $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ という「長方形」になる.

ただし、 $dx dy$ をそのまま $dr d\theta$ に置きかえてはいけない. r と θ の小さな変化 $\Delta r, \Delta \theta$ に対応する xy 平面の部分は、図のような扇形の一部で、その面積は約 $r \Delta r \Delta \theta$ だからである.



(半径 r の円で中心角 $\Delta \theta$ の弧の長さは $r \Delta \theta$ である. 中心から遠いほど、同じ $\Delta \theta$ でも面積が大きくなる.)

定理 1 極座標による変数変換

xy 平面の領域 D が、極座標で $r\theta$ 平面の領域 E ($r \geq 0$) に対応しているとする. f が D で連続ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

($r = 0$ の点のように 1 対 1 に対応しない部分があっても、面積 0 なので影響しない.)

角度の範囲は重複させない

極座標の変数変換では、 D の各点が E の点に (面積 0 の部分を除いて) ちょうど 1 回ずつ対応している必要がある. そのため $r \geq 0$ とし、 θ は幅 2π 以内の範囲 (ふつうは $0 \leq \theta \leq 2\pi$ や $-\pi \leq \theta \leq \pi$) にとる. たとえば円板を $0 \leq \theta \leq 4\pi$ で表すと同じ点を 2 回数えてしまい、値が 2 倍になる. ($\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ の重なりは線分で、面積 0 なので問題ない.)

例 1

半径 a の円板の面積は $\int_0^{2\pi} \int_0^a r \, dr \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} = \pi a^2$. (r を掛け忘れると $2\pi a$ となり, 次元すら合わない.)

例題 1

D を単位円板 $x^2 + y^2 \leq 1$ とする. 次の値を求めよ.

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad (2) \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \quad (3) \iint_D e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

【解答】 $E = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ で, $x^2 + y^2 = r^2$. 被積分関数が θ によらないので, θ の積分は 2π を掛けるだけである.

$$(1) 2\pi \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}. \text{ (No.1 例題 2 で求めた半球の体積と一致する.)}$$

$$(3) 2\pi \int_0^1 e^{-r^2} r \, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \text{ (No.1 例題 1 (2) の評価の範囲に入っている.)}$$

注意

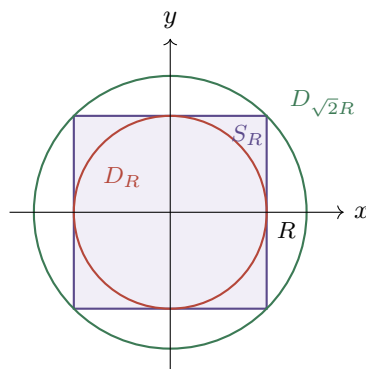
(3) で, xy のままでは $e^{-(x^2 + y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ の原始関数が書けず計算できなかったが, 極座標にすると r が掛かることで $e^{-r^2} r$ の原始関数が求められるようになった. この「 r がうまく働く」ことが, 次のガウス積分の鍵である.

■ 2. ガウス積分

第 2 章 No.4 で予告したガウス積分を証明しよう.

定理 2 ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$



【証明】 $I(R) = \int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx$ とおく. 正方形 $S_R = [-R, R]^2$ 上で, No.2 定理 2 (変数が分離した関数)

より

$$\iint_{S_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = I(R)^2.$$

一方、半径 ρ の円板 D_ρ 上の積分は、例題 1 (3) と同様に $\iint_{D_\rho} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-\rho^2})$. 図のように $D_R \subset S_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ で、被積分関数は正なので (No.1 定理 3)

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq I(R)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}).$$

$R \rightarrow \infty$ とすると両端は π に近づくので、はさみうちの原理より $I(R)^2 \rightarrow \pi$. $I(R) > 0$ なので $I(R) \rightarrow \sqrt{\pi}$. $\square$

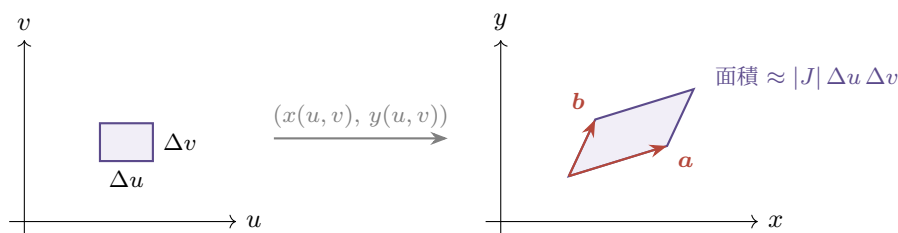
1 変数の積分の値を求めるのに、わざわざ 2 次元に持ち上げて極座標を使う、という鮮やかな証明である. これで第 2 章 No.4 の $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ などもきちんと裏付けられた.

■ 3. 一般の変数変換とヤコビアン

極座標の r は、一般の変数変換では何になるのだろうか. 変換 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ で、 uv 平面の小さな長方形 (辺 Δu , Δv) は、 xy 平面ではほぼ平行四辺形にうつる. 1 次近似 (第 3 章 No.2) より、その 2 辺はベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \Delta u, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \Delta v$$

で近似できる. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積は $|\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b})|$ (分野「線形代数」第 3 章 No.1: 行列式は向きつき面積) なので、面積は約 $|x_u y_v - x_v y_u| \Delta u \Delta v$ になる.



定義 1 ヤコビアン

変換 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ のヤコビ行列 (第 3 章 No.3) の行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

を、この変換のヤコビアン (ヤコビ行列式) という.

定理 3 変数変換の公式

uv 平面の領域 E から xy 平面の領域 D への変換 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ が C^1 級で 1 対 1 であり、 E の内部で $J \neq 0$ とする. f が D で連続ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

(境界の面積 0 の部分では、1 対 1 でなくても $J = 0$ でもよい. 証明は教科書に任せる.)

「 $dx dy = |J| du dv$ 」と覚えればよい. 絶対値を忘れないこと (面積は負にならない). 1 変数の置換積分 $dx = g'(t) dt$ (第 2 章 No.3) の 2 変数版で、 $g'(t)$ がヤコビアンに置きかわっている.

例2 極座標のヤコビアン

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき

$$J = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

これが定理1の r の正体である.

例題2 1次変換

$D = \{(x, y) \mid |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$ のとき, $\iint_D (x + y)^2 dx dy$ を求めよ.

【解答】 $u = x + y, v = x - y$ とおくと, D は $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$ に対応する. 逆に解くと $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ なので

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad |J| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{よって } \iint_E u^2 \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

注意

u, v を x, y で表した式から直接 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$ を求め, その逆数 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$ としてもよい (2つのヤコビ行列は互いに逆行列なので, 行列式は逆数になる). 逆に解くのが面倒なときに便利である.

例題3 楕円

$a, b > 0$ とする. 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ の面積を求めよ.

【解答】 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ (一般化された極座標) とおくと, 領域は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ で, $J = \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{pmatrix} = abr$. よって面積は $\int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = \pi ab$. ($a = b$ なら円の面積 πa^2 .)

コラム: 正規分布とガウス積分

ガウス積分で $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ と置換すると $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ となる (練習問題6). したがって $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ を全体で積分すると1になり, これが標準正規分布の確率密度関数である (分野「確率・統計」第2章 No.4). 確率密度関数の変数変換でも, ここで学んだヤコビアンがそのまま使われる.

■ 練習問題

1. 極座標を使って、次の値を求めよ.

$$(1) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(3) \iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

2. 次の変換のヤコビアン $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

$$(1) x = u + v, y = u - v \quad (2) x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$$

3. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x - y \leq 1\}$ のとき, $\iint_D (x + y)e^{x-y} dx dy$ を求めよ.

4. $\iint_D x^2 dx dy$ を求めよ. ただし D は楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

5. $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy$ を求めよ. (広義の二重積分. 半径 R の円板で計算して $R \rightarrow \infty$ とせよ.)

6. ガウス積分 (定理 2) を使って、次の値を求めよ ($a > 0$).

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

7. **発展** (考えてみよう) D を単位円板から原点を除いた集合とする. 広義積分 $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{p/2}} dx dy$ (p は実数) が収束する p の範囲と, そのときの値を求めよ. 第2章 No.4 定理 1 (2) ($\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ は $p < 1$ で収束) と比べて, 境目が変わる理由を説明せよ.

■ 練習問題の解答

$$1. (1) \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r \, dr \, d\theta = 2\pi \log 2.$$

$$(3) \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$2. (1) J = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

$$(2) J = \det \begin{pmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix} = e^{2u}.$$

$$3. u = x + y, v = x - y \text{ とおくと } E = [0, 1]^2, |J| = \frac{1}{2} \text{ (例題 2)}. \frac{1}{2} \int_0^1 u \, du \int_0^1 e^v \, dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e - 1) = \frac{e - 1}{4}.$$

$$4. x = 2r \cos \theta, y = 3r \sin \theta \text{ とおくと } J = 6r \text{ (例題 3)}. \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cos^2 \theta \cdot 6r \, dr \, d\theta = 24 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = 24 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 6\pi.$$

$$5. \text{半径 } R \text{ の円板で } 2\pi \int_0^R \frac{r}{(1+r^2)^2} \, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2(1+r^2)} \right]_0^R = \pi \left(1 - \frac{1}{1+R^2} \right) \rightarrow \pi.$$

$$6. (1) t = \sqrt{2}x \text{ とおくと } dt = \sqrt{2} \, dx \text{ で, } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$(2) x = \frac{t}{\sqrt{a}} \text{ とおくと } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$7. \varepsilon \leq r \leq 1 \text{ の部分で計算すると } 2\pi \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{r^p} r \, dr = 2\pi \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r^{p-1}}. \text{ 第2章 No.4 定理1 (2) で } p \text{ を } p-1 \text{ に置きかえたものなので, } p-1 < 1, \text{ すなわち } p < 2 \text{ のとき収束して値は } \frac{2\pi}{2-p}, p \geq 2 \text{ で発散. 境目が } 1 \text{ から } 2 \text{ にずれたのは, ヤコビアン の } r \text{ が掛かるためである. 2次元では原点の近くの「面積」が } r \text{ に比例して小さくなるので, そのぶん激しい発散まで許される. (3次元では } r^2 \text{ が掛かり, 境目は } 3 \text{ になる: No.4.)}$$