

No.4 三重積分

この回のゴール

- 三重積分を二重積分と同じように定義し、累次積分で計算できる.
- 円柱座標・球座標による変数変換と、そのヤコビアン r , $r^2 \sin \theta$ を使える.
- 三重積分を使って、体積・質量・重心を求められる.

■ 1. 三重積分と累次積分

3変数関数 $f(x, y, z)$ を空間の有界な領域 V で積分するときも、考え方は二重積分 (No.1) とまったく同じである. 直方体を小さな直方体に分け, 「 f (代表点) $\times$ (小直方体の体積)」の和の極限として

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

を定める. $f = 1$ なら V の体積 $|V|$, f が密度なら V の質量を表す. 線形性・単調性・領域の加法性・対称性も二重積分と同様に成り立つ.

計算は、やはり累次積分で行う.

定理 1 三重積分の累次積分

V が, xy 平面の領域 D と連続関数 $\varphi_1 \leq \varphi_2$ を使って

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

と表され, f が V で連続ならば

$$\iiint_V f dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

外側の二重積分は、さらに No.2 の方法で累次積分にする. (証明は教科書に任せる.)

「各点 (x, y) の真上で z 方向に積分し、それを底面 D で積分する」と考えればよい.

例 1

直方体 $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ では、変数が分離していれば積が使える (No.2 定理 2 と同様):

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^2 y dy \int_0^3 z dz = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

例題 1

$V = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ (四面体) のとき, $\iiint_V x dx dy dz$ を求めよ.

【解答】 底面は $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ で、各 (x, y) の上で z は 0 から $1 - x - y$ まで動く.

$$\iint_D \left(\int_0^{1-x-y} x dz \right) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x(1-x-y) dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{24}.$$

(内側の y の積分は $\int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{(1-x)^2}{2}$. 最後は $\frac{1}{2} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$.) なお, $f=1$ とすれば体積 $\frac{1}{6}$ (No.2 例題 4 で $a=b=c=1$) が得られる.

■ 2. 円柱座標

z 軸のまわりに回転対称な立体では, xy 平面だけを極座標にした**円柱座標**

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

が便利である. ヤコビアンは

$$J = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

(第3列で余因子展開する. 分野「線形代数」第3章 No.3) なので, $dx dy dz = r dr d\theta dz$ となる. 3変数でも変数変換の公式 (No.3 定理 3) は「 $dx dy dz = |J| du dv dw$ 」の形でそのまま成り立つ.

例題 2

放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

【解答】 立体は $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r^2 \leq z \leq 1$ と表せる.

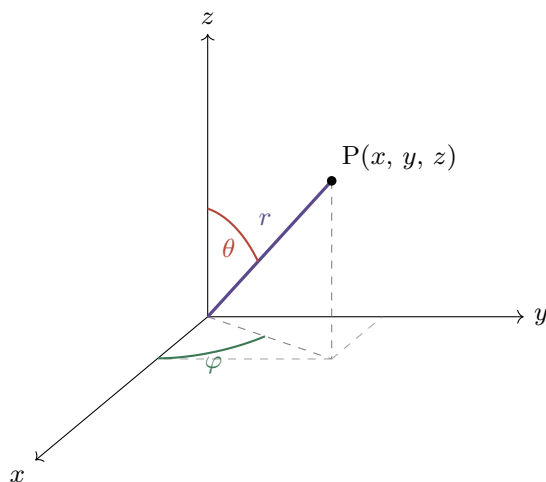
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 dz \right) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (1-r^2)r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

■ 3. 球座標

原点を中心とする球のような立体では, **球座標** (空間の極座標) を使う. 点 P の原点からの距離を r , z 軸の正の向きと $\overrightarrow{OP}$ のなす角を θ , P を xy 平面に下ろした点の偏角を φ とすると

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

空間全体をちょうど1回ずつ表すには, θ を0から π , φ を幅 2π の範囲にとる (φ を0から 4π にとると全体を2回数えてしまう). $\varphi=0$ と $\varphi=2\pi$ や z 軸上 ($\theta=0, \pi$) の点では重なりがあるが, 体積0の部分なので積分には影響しない.



$r \sin \theta$ は P と z 軸の距離 (円柱座標の r にあたる) である. 地球にたとえると, θ は北極からはかった角度 (緯度の余角), φ は経度にあたる. 本によっては θ と φ の役割が逆のこともある (特に物理の本と数学の本で異なることがある) ので, 定義を確認しよう.

定理 2 球座標のヤコビアン

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta. \quad \text{したがって}$$

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (0 \leq \theta \leq \pi \text{ では } \sin \theta \geq 0).$$

【証明】 ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

第3行で余因子展開すると

$$\begin{aligned} & \cos \theta \cdot (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) + r \sin \theta \cdot (r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

□

図形的には, r, θ, φ を少しずつ変えたときにできる小さな「箱」の3辺が $\Delta r, r\Delta\theta, r\sin\theta\Delta\varphi$ で, 体積がその積になる, ということである.

例題 3

半径 a の球 $B_a: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ について,

- (1) 体積を求めよ.
- (2) $\iiint_{B_1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ を求めよ ($a = 1$).

【解答】 球は $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ という「直方体」になる.

- (1) $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 2\pi \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \cdot \frac{a^3}{3} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3.$
- (2) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ なので $2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^1 r^2 \cdot r^2 dr = 4\pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}.$

注意

(1) の計算で $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi$ は単位球面の面積である. 被積分関数が原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だけの関数 $g(r)$ (g は連続) なら, 半径 a の球 B_a について

$$\iiint_{B_a} g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = 4\pi \int_0^a g(r) r^2 dr$$

と, すぐに1変数の積分になる. 球殻 $b \leq r \leq a$ なら r の範囲を b から a にすればよい (θ, φ はどちらも全範囲).

■ 4. 重心

密度 $\rho(x, y, z)$ の物体 V の質量は $M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz$ で、**重心** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho \, dx \, dy \, dz$$

で与えられる。「位置の、質量で重みをつけた平均」である。密度が一定なら ρ は約分されて消える。

例題 4

密度が一定の半球 $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$ の重心を求めよ。

【解答】 対称性から $\bar{x} = \bar{y} = 0$ 。体積は $\frac{2}{3}\pi a^3$ 。球座標で $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ として

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{4}.$$

($\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2}$.) よって $\bar{z} = \frac{\pi a^4/4}{2\pi a^3/3} = \frac{3}{8}a$ 。重心は $(0, 0, \frac{3}{8}a)$ 。

コラム：体積分から面積分へ

この章で学んだ重積分は、分野「ベクトル解析」でさらに発展する。たとえば**ガウスの発散定理**（分野「ベクトル解析」第4章 No.1）は、「立体 V の上の三重積分」を「 V の表面上の面積分」に書きかえる定理で、1変数の「 $\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$ （区間の上の積分 = 端点の値）」の3次元版にあたる。微分積分学の基本定理（第2章 No.2）の精神は、次元が上がっても生き続けるのである。

■ 練習問題

1. V を例題 1 の四面体とする. $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$ を求めよ. (ヒント: 例題 1 と対称性.)
2. 円柱座標を使って, $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz$ を求めよ. ただし $V: x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$.
3. 球座標を使って, 次の値を求めよ.
 - (1) $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$
 - (2) $\iiint_{1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$
4. 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ のうち, 円すい $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ の内側にある部分 (アイスクリームの形) の体積を求めよ. (ヒント: 円すいの面は球座標で $\theta = \frac{\pi}{4}$.)
5. 密度が一定の四面体 V (例題 1) の重心を求めよ.
6. 第 2 章 No.4 定理 1, No.3 練習問題 7 にならって, 原点を除いた単位球での広義積分 $\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{p/2}}$ が収束する p の範囲を求めよ.
7. **発展** (考えてみよう) $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$ を次の 2 通りの方法で求め, 一致することを確認せよ.
 - (a) $e^{-(x^2+y^2+z^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2} e^{-z^2}$ とガウス積分 (No.3 定理 2) を使う.
 - (b) 球座標を使う. ($\int_0^\infty r^2 e^{-r^2} dr$ は部分積分と第 2 章 No.4 の結果を使う.)

■ 練習問題の解答

1. V は x, y, z を入れかえても変わらないので, $\iiint y = \iiint z = \iiint x = \frac{1}{24}$. 合計 $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

$$2. \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi.$$

$$3. (1) 4\pi \int_0^1 r \cdot r^2 \, dr = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi.$$

$$(2) 4\pi \int_1^2 \frac{1}{r^2} r^2 \, dr = 4\pi.$$

$$4. 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ なので } 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d\theta \int_0^2 r^2 \, dr = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

5. 体積 $\frac{1}{6}$, $\iiint x = \frac{1}{24}$ より $\bar{x} = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$. 対称性から重心は $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. (三角形の重心が頂点の平均であるのと同様に, 四面体の重心も4頂点の平均になっている.)

6. $\varepsilon \leq r \leq 1$ で $4\pi \int_{\varepsilon}^1 \frac{r^2}{r^p} \, dr = 4\pi \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r^{p-2}}$. $p-2 < 1$, すなわち $p < 3$ のとき収束 (値 $\frac{4\pi}{3-p}$), $p \geq 3$ で発散. 1次元では $p < 1$, 2次元では $p < 2$, 3次元では $p < 3$ と, 境目は次元と一致する.

$$7. (a) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^3 = (\sqrt{\pi})^3 = \pi^{3/2}.$$

$$(b) 4\pi \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2} \, dr. \text{ 第2章 No.4 練習問題5 より } \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2} \, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \text{ なので, } 4\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \pi^{3/2}.$$

一致する.