

数学 I 第 1 章 数と式 No. 1

学習のねらい

中学校で習った数学の言葉とルールを思い出し、「降べきの順」を理解しよう！

1. 単項式・次数・係数

2、 x 、 $5y^2$ 、 $6abc$ のように、数や文字およびそれらを掛け合わせてできる式を単項式という。単項式において、掛けられている文字の個数を次数、文字以外の部分を係数という。

例) $-3x^2y^3$ は、 x を2個、 y を3個掛けているので次数は5となる。

また、 x に着目する(つまり x 以外は数のように扱う)と、次数は2であり、係数は、 $-3y^3$ となる。

2. 多項式・同類項・整式

$5x^2 + 4x - 2x^2 - 3$ という式は、 $5x^2$ 、 $4x$ 、 $-2x^2$ 、 -3 を足した式である。このようにいくつかの単項式の和で表された式を多項式という。また、それぞれの部分を項といい、特に -3 のように文字が付いてない項のことを定数項という。

この単項式と多項式を合わせて整式と呼ぶ。しかし、単項式を項が1つの多項式と考え、多項式と整式を同じ意味合いで用いる場合がある。

また、多項式の項の中で、文字の部分が同じである項(今回の場合、 $5x^2$ と $-2x^2$)を同類項という。

3. 降べきの順と多項式の次数

整式は、しばしば各項の次数の順番がバラバラに並んでいる時がある。例えば、 $3x^2 + 4x^4 - 2 - x^3 + 5x$ という式があった場合、各項の次数は、順に2、4、0、3、1となっている。

このような場合、通常”次数の高い順”に並び替える。この順のことを降べきの順という。降べきの順に並び替えると、 $4x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x - 2$ という並びになる。

また、同類項をまとめて整理した多項式において、最も次数の高い項の次数を、この多項式の次数といい、次数が n の多項式を n 次式という。

4. 多項式の加法・減法・乗法

多項式の加法・減法・乗法では以下の法則が成り立つ。

交換法則 $A + B = B + A$ 、 $AB = BA$

結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$ 、 $(AB)C = A(BC)$

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$ 、 $(A + B)C = AC + BC$

5. 指数法則

m 、 n を正の整数とする。

$$1. a^m a^n = a^{m+n} \quad 2. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n$$

◇問題

1. 次の整式の同類項をまとめて整理せよ。また、[]内の文字に着目して、その次数と定数項をいえ。

$$2a^2 - ab - b^2 + 4ab + 3a^2 + 2b^2 \quad [b]$$

2. $A = x^2 + 3y^2 - 2xy$ 、 $B = y^2 + 3xy - 2x^2$ 、 $C = -3x^2 + xy - 4y^2$ であるとき、次の計算をせよ。

$$(1) A + B \quad (2) 3(2A + C) - 2\{2(A + C) - (B - C)\}$$

3. 次の計算をせよ。

$$(1) 2x^3 \times 6x^2 \quad (2) \frac{9x^3y^4z^2}{3xy^2z}$$

数学Ⅰ 第Ⅰ章 数と式 No.2

学習のねらい

中学校で習った展開・因数分解の式を思い出し、高校で習う展開・因数分解の式を理解して覚えよう！

1. 中学で習った展開・因数分解の公式

下記公式は、中学で習った展開・因数分解の式である。左から右の計算が展開、右から左の計算が因数分解である。

$$\textcircled{1}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\textcircled{2}(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\textcircled{3}(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\textcircled{4}(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

2. 高校で習う展開の公式

式の展開では、分配法則を使うのが基本である。そこで $(a+b+c)^2$ を展開してみよう。

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\end{aligned}$$

因数分解は練習あるのみ！
とにかく解いて解いて解きまくる！



下記公式は先ほどと同様に、左から右の計算が展開、右から左の計算が因数分解である。

$$\textcircled{1}(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\textcircled{2}(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\textcircled{3}(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\textcircled{4}(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

($\textcircled{4}$ の因数分解については次回 No.3 で扱う。)

3. 高校で習う因数分解の公式

$$\textcircled{1}a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\textcircled{2}a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\textcircled{3}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

4. 式の特徴に着目した因数分解

式を因数分解するときに、式の形の特徴に着目して変形を行うと、因数分解の公式が利用できる場合がある。

例) $x^2 - y^2 - 2y - 1$ を因数分解せよ。

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - 2y - 1 &= x^2 - (y^2 + 2y + 1) \\ &= x^2 - (y+1)^2 \\ &= \{x + (y+1)\}\{x - (y+1)\} \\ &= (x+y+1)(x-y-1)\end{aligned}$$

← $y+1 = A$ とすると
 $x^2 - A^2$ となる！

◇問題

1. 次の式を展開せよ。

$$(1) (a - 2b + c)^2 \quad (2) (x - 4)^3 \quad (3) (3a + b)^3$$

2. 次の式を展開せよ。

$$(1) (x + y - z)(x - y + z) \quad (2) (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 5) \\ (3) (a - b)(a^2 + b^2)(a + b) \quad (4) (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

3. 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3 + 64 \quad (2) x^4 - 10x^2 + 9 \quad (3) 9b^2 + 3ab - 2a - 4$$

数学 I 第 I 章 数と式 No.3

学習のねらい

少し難しい因数分解の方法”たすきがけ”をマスターしよう！

例) $2x^2 + 5x + 3$ を因数分解せよ。

Step.1

掛けて2、掛けて3になるものを考える。

今回の場合、 1×2 と 1×3 。

Step.2

それらの数字を並べる。

1	1
2	3

Step.3

クロスで掛け算する(たすきをかける)。

1	1	→	2
2	3	→	3

Step.4

出てきた数字を足し算する。

1	1	→	2
2	3	→	3
			5

Step.5

出てきた数字が x の項の係数と一致するか確認する。

同じ数字の場合次のステップへ。違う数字の場合 Step.1 に戻る。

Step.6

そのまま括弧をつけて終わり！

今回の場合、 $(1x + 1)(2x + 3) = (x + 1)(2x + 3)$

$$\therefore 2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$$

注) “ $\therefore$ ”は「ゆえに」という意味。覚えておこう！

ちなみに” $\because$ ”は「なぜならば」という意味。

私の後ろにかけているのが

「たすき」だよ。

クロスしているからたすきがけと
言われているのだ！



◇問題

1. 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2 + 7x + 3$ (2) $3x^2 + 10x + 7$ (3) $6x^2 + x - 2$

(4) $4x^2 - 4x - 3$ (5) $5a^2 - 13ab + 6b^2$ (6) $8x^2 + 2ax - 3a^2$

2. 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 5x + 3y + 2$

(2) $2x^2 + xy - y^2 + 5x + 2y + 3$

数学 I 第 1 章 数と式 No.3 補足

学習のねらい

因数分解(たすきがけ)のコツを知ろう！

①式の符号を見て括弧の中身の符号を当てよ！

a 、 b 、 c 、 A 、 B 、 C 、 D を正の整数とする。

$ax^2 + bx + c$ を因数分解する場合、 $(Ax + B)(Cx + D)$ となる。

$ax^2 + bx - c$ を因数分解する場合、 $(Ax + B)(Cx - D)$ となる。

$ax^2 - bx - c$ を因数分解する場合、 $(Ax + B)(Cx - D)$ となる。

$ax^2 - bx + c$ を因数分解する場合、 $(Ax - B)(Cx - D)$ となる。

与えられた式を見れば括弧内の符号が決まるのでたすきがけがしやすくなる。



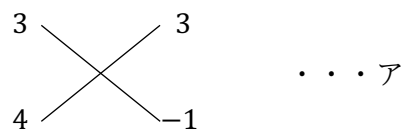
②たすきがけのパターンを絞れ！

すでに①でパターンは絞れるのだが、さらに絞る方法がある。ここでは、 $12x^2 - 16x - 3$ を例に考えてみる。

例) $12x^2 - 16x - 3$ を因数分解せよ。

与えられた式の形で、 $(Ax + B)(Cx - D)$ の形に因数分解できることは明らかとなる。

ここで、このAのパターンを更に消すことができる。



もしこの形が採用されると、因数分解の結果は、 $(3x + 3)(4x - 1)$ となる。すると、 $(3x + 3) = 3(x + 1)$ と変形できることになる。これは、最初の与えられた式 $12x^2 - 16x - 3$ の時点で、3で括れることを意味してしまう。

しかし、 $12x^2 - 16x - 3$ という式は3で括ることはできない。よってAのパターンのたすきがけは消去することができる。

つまり、同じ因数を持つ数字が横並びには基本来ない！(もし来るなら、最初の時点で括れる)ということが言える。

◇問題

1. 次の式を因数分解せよ。

$$(1)3x^2 + 5x + 2 \quad (2)2x^2 - 9x + 4 \quad (3)6x^2 + x - 1$$

$$(4)8x^2 - 2xy - 3y^2 \quad (5)6a^2 - ab - 12b^2 \quad (6)10p^2 - 19pq + 6q^2$$

2. 次の式を因数分解せよ。

$$(1)a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$$

$$(2)a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

数学 I 第 1 章 数と式 No.4

学習のねらい

“実数”などの言葉の意味を知り、理解しよう！また、小数の扱いに慣れよう！

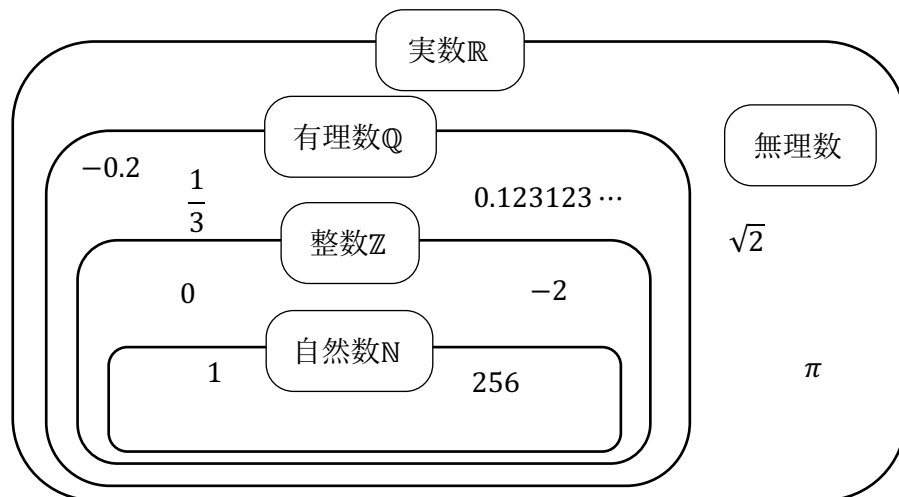
1. 数の分類

自然数 1、2、3、…に、0と-1、-2、-3、…とを合わせて整数という。また整数 m と0でない整数 n を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形で表される数を有理数という。例えば、次の数は全て有理数である。

$$\frac{2}{3}, \quad 3 = \frac{3}{1}, \quad -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}, \quad 0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

整数 m は $\frac{m}{1}$ と表されるので整数は有理数である。一方、無理数とは、「分数で表せない数のこと」である。また、有理数と無理数を合わせて実数という。

注) 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ などと表す。集合を表す文字は、太字となる。



2. 循環小数

小数は、小数点以下が無限に続く小数(無限小数)と、無限に続かない小数(有限小数)がある。

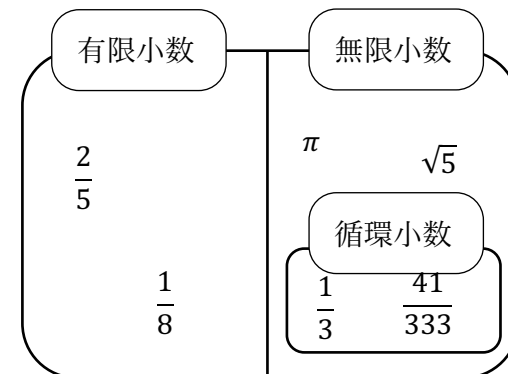
また無限小数の中にも、0.123123…のようにある規則で繰り返す小数もある。このような小数を循環小数という。

循環小数は、繰り返す最初と最後の数字の上に点を付けて表す。例えば、

$$0.123123123\ldots = 0.\dot{1}2\dot{3}$$

$$0.333333333\ldots = 0.\dot{3}$$

と書く。また、循環小数は必ず分数で表すことができる。



例) 0.123123123…を分数で表せ。

$x = 0.123123123\ldots$ とする。123の部分が繰り返されているので、ここを上手く消す方法を考える。

$$\begin{array}{r} 1000x = 123.123123 \\ -) \quad x = 0.123123 \\ \hline 999x = 123 \end{array}$$

$1000x = 123.123123123\ldots$ であるから、右上のように差をとると、

$999x = 123$ となる。よって、 $x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$ であることがわかる。

数って奥が深いね……。

数学IIで新しい数が出てくるし……。

まあ、頑張っていきましょう！！



◇問題

1. 次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{1}$ (2) $0.\dot{1}\dot{2}$ (3) $0.\dot{6}4\dot{8}$ (4) $6.\dot{2}\dot{7}$

数学 I 第 1 章 数と式 No.5

学習のねらい

絶対値を理解し扱えるようになろう！また、絶対値と平方根との関係、分母の有理化について理解しよう！

1. 絶対値

数直線上で、原点 O と点 P(a) の距離を a の **絶対値** といい、 $|a|$ で表す。なお、0 の絶対値は $|0| = 0$ である。他にも、例えば $|5| = 5$ 、 $|-2| = 2$ となる。また、

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

である。

例) $|-5| = -(-5) = 5$

2. 平方根

中学生でも学習した **平方根**。平方根とは、2乗すると中身の数になる数のことで、 $\sqrt{a}$ のように表す。また、

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

である。

例) $\sqrt{(-5)^2} (= \sqrt{25} = 5) = -(-5) = 5$

3. 絶対値と平方根の関係

1 と 2 を合わせると、

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

となる。

4. 分母の有理化

中学で、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の有理化はできるようになった。分母と分子に同じものを掛け算することがポイントだ。では、次の例の時、どのように有理化をしようか。

例) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ に対し、分母の有理化をせよ。

このような時は、 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ を使い、有理化する。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

$\sqrt{a^2} = |a|$ は超絶大事なので覚えて欲しい！
分母の有理化も絶対にできるようになって欲しい！



絶対値については、No.10、11 でもう一度扱う。

◇問題

1. 次の値を求めよ。

$$(1)|8| \quad (2)\left|-\frac{2}{3}\right| \quad (3)|3-\pi|$$

2. 次のそれぞれの場合に、 $A = |a-3| + |a+1|$ を簡単にせよ。

$$(1)a \geq 3 \quad (2)-1 \leq a < 3 \quad (3)a < -1$$

3. $\sqrt{a^2b^2}$ を根号がつかない形にせよ。ただし $a > 0$ 、 $b < 0$ である。

4. 次の式を、分母を有理化して簡単にせよ。

$$(1)\frac{4}{3\sqrt{6}} \quad (2)\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} \quad (3)\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

5. $\frac{2}{\sqrt{6}-2}$ の整数部分を a 、小数部分を b とする。

(1) a 、 b の値を求めよ。(2) $a^2 + ab$ の値を求めよ。

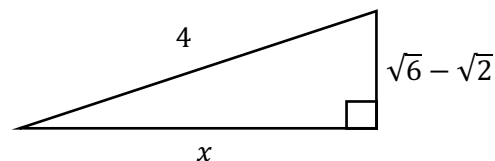
数学Ⅰ 第Ⅰ章 数と式 No.6

学習のねらい

2重根号の処理の仕方をマスターしよう！

$\sqrt{\quad}$ の中に $\sqrt{\quad}$ が入る、いわゆる2重根号と呼ばれる形の処理について扱っていく。

例) 右図の直角三角形において、 x の値を求めよ。



三平方の定理より、 $x^2 = 4^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$ となる。よって、 $x > 0$ より、 $x = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$ となる。

さて、このような2重根号が出てきてしまった場合、結局 x がどのくらいの値なのかが分かりにくい。また、共通テストなどだと、2重根号を解消した形で解答する必要もある。

ではどのように解消するのか？例を用いて考えていく。

例えば、 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ である。両辺の正の平方根を考える。

すると、 $\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ となる。左辺は、 $\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} =$

$|\sqrt{2} + \sqrt{3}| = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ となるので、 $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ である。

これを a 、 b でやると以下のことが分かる。

$a > b > 0$ とする。 $a + b = A$ 、 $ab = B$ となる組み合わせを見つければ、

$\sqrt{A + 2\sqrt{B}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ と変形できる。

以上のことをまとめると、2重根号は以下のステップで外すことができる。

Step.1

$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$ の2重根号を外すとき、 $a + b = A$ 、 $ab = B$ 、 $a > b > 0$ を満たす a 、 b の組み合わせを見つける。

Step.2

$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ と変形して完成！

ポイントはいっぱいあるから、
問題を解いて慣れていこう！



◇問題

1. 次の式の2重根号をはずして簡単にせよ。

$$(1)\sqrt{3+2\sqrt{2}} \quad (2)\sqrt{8-2\sqrt{15}} \quad (3)\sqrt{8+4\sqrt{3}} \quad (4)\sqrt{6+\sqrt{35}}$$

数学Ⅰ 第Ⅰ章 数と式 No.7

学習のねらい

対称式を理解し、式の値を簡単に求められるようになるろう！

文字を入れ替えても全く同じ式になる式のことを対称式という。

例) $x + y$ 、 xy 、 $x^2 + y^2$ 、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 、 $x^2 + y^2 + z^2$ は対称式である。

上の例は x と y を入れ替えても、元の式と同じ式になるため対称式である。

2変数の対称式の場合、 $x + y$ 、 xy のことを基本対称式という。なお、すべての対称式は、基本対称式を使って表すことができる。

例) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

なお、3変数の対称式の場合、基本対称式は、 $x + y + z$ 、 $xy + yz + zx$ 、 xyz になる。

例) $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

これらの性質を使った頻出問題を以下に載せる。

例) $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ 、 $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^2 + y^2$ (4) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

解答

$$(1) x + y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$(2) xy = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 1$$

$$(3) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$$

$$(4) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{4}{1} = 4$$

注) “.”は掛け算を表す。一般的に、数×数の際、数・数と書く場合が多い。

慣れれば、すぐできるようになるから、
問題をいっぱい解こう！



◇問題

1. $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 、 $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^2 + y^2$ (4) $x^3 + y^3$ (5) $x^4 + y^4$

2. $x + y + z = -2$ 、 $xy + yz + zx = -4$ 、 $xyz = 1$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 + z^2$ (2) $x^3 + y^3 + z^3$ (3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (4) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

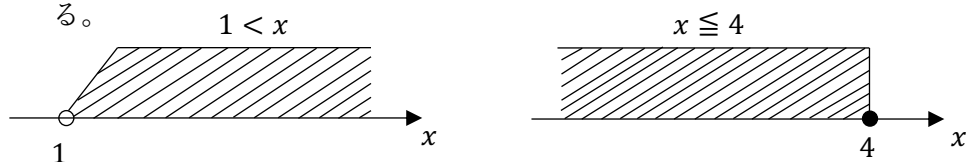
数学Ⅰ 第Ⅰ章 数と式 No.8

学習のねらい

Ⅰ 次不等式を理解し、扱えるようになるろう！

1. 不等式と数直線

不等号と呼ばれる記号(>、≤など)を用いて、大小関係を表す式を不等式という。不等式は、数直線を用いて表すと、視覚化できて便利である。



上のように、「>」や「<」は、○で表し、線を斜めにすると見やすくなる。逆に、「≥」、「≤」は、●で表し、線を垂直に書くと数直線を書いたときに見やすくなる。各記号の読み方は、「>」：大なり、「<」：小なり、「≥」：大なりイコール、「≤」：小なりイコールである。

2. 1 次不等式の計算

a、b、cを実数としたとき、不等式に関して以下が成り立つ。

① $a < b$ のとき、 $a + c < b + c$ 、 $a - c < b - c$

② $a < b$ かつ $c > 0$ のとき、 $ac < bc$ 、 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

③ $a < b$ かつ $c < 0$ のとき、 $ac > bc$ 、 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

重要なのは③で、両辺にマイナスの数を掛けたり、割ったりする場合、不等号の向きが逆になる。それ以外の場合は、等号(=)と同じように扱うことができる。

例) 不等式 $-\frac{1}{2}x + 4 > 9$ を解け。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 4 &> 9 \\ -\frac{1}{2}x &> 9 - 4 && \text{左辺の+4を右辺に移項} \\ -\frac{1}{2}x &> 5 \\ x &< 5 \times (-2) && \text{両辺を-2倍} \\ x &< -10 && \text{このとき、不等号の向きが逆になる} \end{aligned}$$

3. 1 次不等式の利用

1 次不等式の応用として、1 次不等式の利用もある。これは◇問題で慣れていって欲しい。

ちょっと難しくなってきたね・・・。
頑張ろ！！問題を解いて慣れるのだ！



◇問題

1. 次の不等式を解け。

$$(1) 5x - 3 < 2x + 9 \quad (2) 4(2x - 2) \leq -(x - 1)$$

$$(3) \frac{x+2}{3} < \frac{x-1}{2} \quad (4) 0.3x - 2 \geq 0.5x + 0.4$$

2. 通信販売で 1 個 500 円の品物 A と 1 個 700 円の品物 B を合わせて 50 個買うことにした。送料は、品物 50 個をまとめて 1500 円かかる。品物代と送料の合計金額を 30000 円以下にすると、品物 B は最大で何個買えるか。

ヒント：品物 B を x 個買うとして、条件から不等式を作る。 x は整数であることに注意する。

数学 I 第 1 章 数と式 No.9

学習のねらい

連立不等式を解けるようになろう！

いくつかの不等式を組み合わせたものを連立不等式といい、それらの不等式を同時に成り立たせる x の値の範囲を、その連立不等式の解という。また連立不等式の解を求めることを、その連立不等式を解くという。

例) 連立不等式 $\begin{cases} 7x - 1 \geq 4x - 7 \\ x + 5 > 3(1 + x) \end{cases}$ を解け。

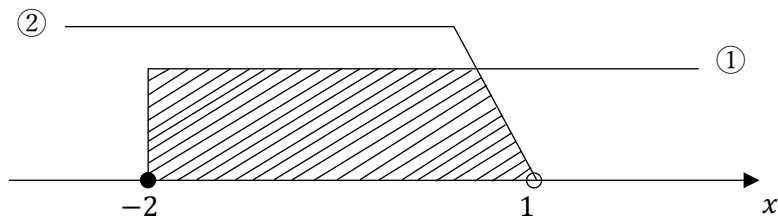
$$7x - 1 \geq 4x - 7 \text{ より、} 3x \geq -6$$

$$\text{よって、} x \geq -2 \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 5 > 3(1 + x) \text{ より、} -2x > -2$$

$$\text{よって、} x < 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore \textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて、} -2 \leq x < 1$$



また、この例題の不等号の向きを変えた連立不等式

$$\begin{cases} 7x - 1 \leq 4x - 7 \\ x + 5 < 3(1 + x) \end{cases}$$

は、2 式を同時に成り立たせる x の値の範囲がないので、解はない。



このように、連立不等式には、解がない場合もある。

Topic—学校の勉強は必要？

よく、考えるよね。学校の勉強って必要なのかな？と。例えば、数学なら、「将来使わない!」、「不等式なんて、大人になったら使わない。」などなど……。実際問題、例えば、電気系のお仕事をしている人や、建設業の方々、そしてマーケティングなどを行っている人は、数学を使っている。でも、こう言うと、「いや、自分、それらにならないんで。」と言うだろう。

じゃあ、学校の勉強は必要なのだろうか？僕は必要だと思う。というのも、人生は、常に勉強をするものだと思っているので、その時、論理的に考えることや、勉強の仕方を知らないで、困ると思う。まあ、この話が伝わらなくとも、勉強をやっておいて損は無いから、まずちょっとだけでもやってみよ！最初はそのくらいの気持ちで良い！

◇問題

1. 連立不等式(1) $\begin{cases} 5x + 1 \leq 8(x + 2) \\ 2x - 3 < 1 - (x - 5) \end{cases}$ 、(2) $\begin{cases} x + 7 < 1 - 2x \\ 6x + 2 \geq 2 \end{cases}$ を解け。

2. 不等式 $-2x + 1 < 3x + 4 < 2(3x - 4)$ を解け。

数学 I 第 1 章 数と式 No. 10

学習のねらい

絶対値を含む方程式を解けるようになろう！

1. 絶対値を含む方程式(右辺に x が無い ver.)

絶対値を外す方法は、

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

である。では、以下の場合どのように処理するか。

例) 方程式 $|x + 3| = 4$ を解け。

$x + 3 \geq 0$ と、 $x + 3 < 0$ で 場合分け が必要ということだ。

(i) $x + 3 \geq 0$ つまり、 $x \geq -3$ のとき

$x + 3 = 4 \quad \therefore x = 1$ これは、 $x \geq -3$ を満たす。

(ii) $x + 3 < 0$ つまり、 $x < -3$ のとき

$-(x + 3) = 4 \quad \therefore x = -7$ これは、 $x < -3$ を満たす。

よって、 $x = 1, -7$

「〇〇のとき」とした条件を、出てきた解が満たしているのかを確認することが大切である。

しかし、もっと早く解く方法もある。

例) 方程式 $|x + 3| = 4$ を解け。

$x + 3 = \pm 4$ なので、 $x = 1, -7$

これだけ。簡単でしょ。ただ、↓この ver.だとこの方法は使えない。

2. 絶対値を含む方程式(右辺に x が有る ver.)

この場合は、場合分けをして解くしか方法がない。

例) 方程式 $|x + 2| = 3x$ を解け。

仮に、 $\pm$ で解こうとすると、 $x + 2 = \pm 3x$ なので、 $x = 1, -\frac{1}{2}$ となる。

しかしよく見てほしい。 $x = -\frac{1}{2}$ のときは、与式を満たさない!!!

(i) $x + 2 \geq 0$ つまり、 $x \geq -2$ のとき

$x + 2 = 3x \quad \therefore x = 1$ これは、 $x \geq -2$ を満たす。

(ii) $x + 2 < 0$ つまり、 $x < -2$ のとき

$-(x + 2) = 3x \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$ これは、 $x < -2$ を満たさない。

よって、 $x = 1$

このように、右辺に x があるか無いかで解き方が変わる。

◇問題

1. 次の方程式を解け。

$$(1)|x-1|=2 \quad (2)|x+5|=3 \quad (3)|x+4|=5x$$

$$(4)2|x-1|=3x \quad (5)|2x+1|=x+4$$

数学 I 第 1 章 数と式 No.11

学習のねらい

絶対値を含む不等式を解けるようになろう！

1. 絶対値を含む不等式(右辺に x が無い ver.)

絶対値を外すという考え方は、絶対値を含む方程式と変わらない。

例) 不等式 $|x + 3| < 4$ を解け。

(i) $x + 3 \geq 0$ つまり、 $x \geq -3$ のとき

$$x + 3 < 4 \quad \therefore x < 1 \quad \text{これと、} x \geq -3 \text{ を合わせて } -3 \leq x < 1$$

(ii) $x + 3 < 0$ つまり、 $x < -3$ のとき

$$-(x + 3) < 4 \quad \therefore x > -7$$

これと、 $x < -3$ を合わせて $-7 < x < -3$ 。

よって、(i)(ii) を合わせると、 $-7 < x < 1$

しかし、これにも早い解き方があって、 $|x + 3| < 4$ はつまり、 $-4 < x + 3 < 4$ だから、 $-7 < x < 1$ である、と。早いでしょ。まとめておく。

c が正の定数のとき	方程式 $ x = c$ の解は	$x = \pm c$
	不等式 $ x < c$ の解は	$-c < x < c$
	不等式 $ x > c$ の解は	$x < -c, c < x$

2. 絶対値を含む不等式(右辺に x が有る ver.)

ただお察しの通り、この公式は右辺が正の定数のときのみ使える。そのため、右辺に変数がある場合は、そのまま使うことはできない。

例) 不等式 $|x + 1| < x$ を解け。

実際にやってみると、 $-x < x + 1 < x$ となり、 $-\frac{1}{2} < x$ かつ $1 < 0$ となる。 $1 < 0$ が出てきた時点で矛盾が起きている。

ということで場合分けしてみよう。

(i) $x + 1 \geq 0$ つまり、 $x \geq -1$ のとき

$$x + 1 < x \quad \therefore \text{これを満たす実数は存在しない。}$$

(ii) $x + 1 < 0$ つまり、 $x < -1$ のとき

$$-(x + 1) < x \quad \therefore x > -\frac{1}{2}$$

これと、 $x < -1$ を合わせると、これを満たす実数は存在しない。
よって、(i)(ii) より、与式を満たす実数は存在しない。

このように、公式は右辺が定数のときのみ使える。右辺に変数が含まれる場合は、場合分けをして絶対値を外すことが重要である。

これにて第 1 章 数と式は完結！！

第 2 章も頑張っていきましょう！



◇問題

1. 次の不等式を解け。

$$(1)|x-2|<4 \quad (2)|x+3|\geq 5 \quad (3)|x-4|<3x$$