

数学 I 第 1 章 数と式 No.7

学習のねらい

対称式を理解し、式の値を簡単に求められるようになるろう！

文字を入れ替えても全く同じ式になる式のことを対称式という。

例) $x + y$ 、 xy 、 $x^2 + y^2$ 、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 、 $x^2 + y^2 + z^2$ は対称式である。

上の例は x と y を入れ替えても、元の式と同じ式になるため対称式である。

2変数の対称式の場合、 $x + y$ 、 xy のことを基本対称式という。なお、すべての対称式は、基本対称式を使って表すことができる。

例) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

なお、3変数の対称式の場合、基本対称式は、 $x + y + z$ 、 $xy + yz + zx$ 、 xyz になる。

例) $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

これらの性質を使った頻出問題を以下に載せる。

例) $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ 、 $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^2 + y^2$ (4) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

解答

$$(1) x + y = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$(2) xy = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 1$$

$$(3) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$$

$$(4) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{4}{1} = 4$$

注) “.”は掛け算を表す。一般的に、数×数の際、数・数と書く場合が多い。

慣れれば、すぐできるようになるから、
問題をいっぱい解こう！



◇問題

1. $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 、 $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^2 + y^2$ (4) $x^3 + y^3$ (5) $x^4 + y^4$

2. $x + y + z = -2$ 、 $xy + yz + zx = -4$ 、 $xyz = 1$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 + z^2$ (2) $x^3 + y^3 + z^3$ (3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (4) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$