

数学 I 第 2 章 集合と命題 No.1

学習のねらい

“集合”という新しい概念を理解し、書き表し方に慣れよう！

1. 集合・要素

「1 から 10 までの自然数の集まり」というと、その集まりの範囲がはっきりしている。一方で、「大きい数の集まり」というと、人によって範囲が変わってしまう。

数学の世界では、範囲がはっきりとしたものの集まりを集合という。また、集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の要素という。

例えば、「Mrs. GREEN APPLE」という集合に対して、「大森元貴」は要素ということである。

a が集合 A の要素であるとき、 a は集合 A に属するといい、記号で、 $a \in A$ と表す。先ほどの例で言うと、

大森元貴 $\in$ Mrs. GREEN APPLE

ということである。

また、 b が集合 A の要素でないことを、 $b \notin A$ と表す。先の例だと、

二宮和也 $\notin$ Mrs. GREEN APPLE

ということである。

(これを作っている段階では、二宮和也は Mrs. GREEN APPLE に所属していません。)

2. 集合の表し方

集合を表すときには、 $\{ \}$ を用いて以下のように表す。

(1) 12 の正の約数全体の集合 A

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

(2) 5 の倍数の集合 B

$$B = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\} = \{5n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

表し方には 2 種類方法があって、要素を書き並べる方法と、縦線の左側に要素を代表して文字で表し、縦線の右側にその文字に対する条件を書く方法がある。

また、集合 A のような有限個の要素からなる集合を有限集合、集合 B のような無限に多くの要素からなる集合を無限集合という。

Topic—大学という場

大学は名目上「研究機関」である。しかし将来、学校の先生になる、という人は、大学に教員免許を取りに行くような感覚かもしれない。

でも、大学は、卒論というものがあって、その時に研究をしなければならない。そのような時が、来た時には、ぜひ“研究”を楽しんで欲しい。自分の興味のある分野をとことん突き詰めると、それだけで個性になる。研究するだけで個性になるってとても楽なことじゃないか？と僕は思ってしまう。

ぜひ、高校生の時から、興味のある分野等に手を出し、大学生になったら爆発的に個性を伸ばして行って欲しい。

◇問題

1. 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とする。次の数字と $\mathbb{Q}$ の間に、 $\in$ もしくは、 $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ。

(1) $3 \in \mathbb{Q}$ (2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (3) $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

2. 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 18の正の約数全体の集合 A

(2) $B = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \text{は整数}\}$

(3) $C = \{2n + 1 \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

数学 I 第 2 章 集合と命題 No.2

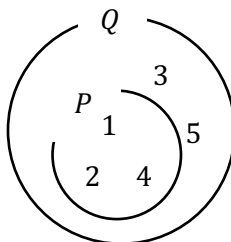
学習のねらい

様々な集合を理解し、ド・モルガンの法則について理解して覚えよう！

1. 部分集合

2つの集合 $P = \{1, 2, 4\}$ 、 $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ では、 P のどの要素も Q の要素になっている。一般に2つの集合 A 、 B において、 A のどの要素も B の要素である時、すなわち「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つとき、 A は B の部分集合であるといい、 $A \subset B$ と表す。

このとき、 A は B に含まれる、または B は A を含むという。



注) 右上図のような包含関係を表した図をベン図という。

No.1 の例で言うと、

Mrs. GREEN APPLE $\subset$ アーティスト

ということである。

また、要素を1つも持たない集合も考える。この集合を空集合といい、記号 ϕ で表す。また空集合は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

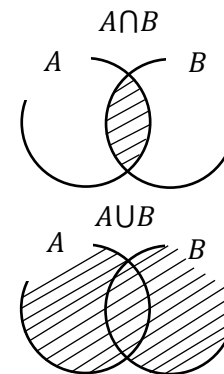
すなわち、任意の集合 A に対して、 $\phi \subset A$ とする。

例) 集合 $\{1, 2\}$ の部分集合は、 ϕ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{1, 2\}$ である。

2. 共通部分・和集合

2つの集合 A 、 B に対して、 A 、 B どちらにも属する要素全体の集合を A と B の共通部分といい、 $A \cap B$ と表す。

また、2つの集合 A 、 B に対して、 A 、 B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の和集合といい、 $A \cup B$ と表す。



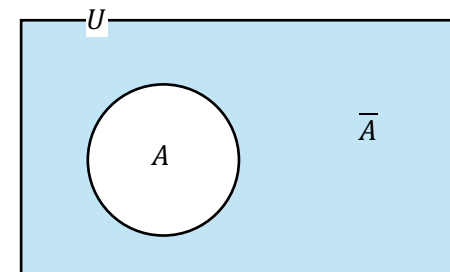
例) $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 、 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ において、

$$A \cap B = \{6, 12\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

3. 全体集合・補集合

集合を考える時、例えば「日本の」などと、1つの集合 U を最初に決めて、要素としては U の要素だけを、集合としては U の部分集合だけを考えることが多い。このとき、集合 U を全体集合という。また、全体集合 U の部分集合 A に対して、 A に属さない U の要素全体の集合を U に関する A の補集合といい、 $\bar{A}$ で表す。また、 $A \cap \bar{A} = \phi$ 、 $A \cup \bar{A} = U$ 、 $\overline{\bar{A}} = A$ が成り立つ。



4. ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

◇問題

1. (1)集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ と、集合 $B = \{x \mid x \text{ は } 4 \text{ の正の約数}\}$ の間に成り立つ関係を、 $\subset$ 、 $=$ を用いて表せ。

(2)集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合を全て答えよ。

2. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ 、 $B = \{1, 3, 5, 7\}$ 、 $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ について、 $A \cap B \cap C$ と $A \cup B \cup C$ を求めよ。

3. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とするとき、その部分集合 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 、 $B = \{3, 6, 9\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $\bar{A}$ (2) $\bar{B}$ (3) $\bar{A} \cap B$ (4) $A \cup \bar{B}$

4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 、 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ がそれぞれ成り立つことを、ベン図を用いて表せ。

数学 I 第 2 章 集合と命題 No.3

学習のねらい

“命題”を理解し、十分条件・必要条件を判定できるようになろう！

1. 命題と真偽

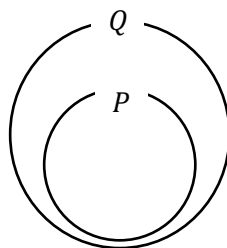
正しいか正しくないかが明確に決まる文や式のことを命題という。

- 例) Aさんは日本人である →これは命題である
Bさんは背が大きい →これは命題でない
3は1より大きい →これは命題である
1は3より大きい →これは命題である

命題が正しいとき、その命題は真であるという。命題が正しくないとき、その命題は偽であるという。

- 例) 3は1より大きい これは正しいので真
1は3より大きい これは間違っているので偽

一般的に命題は、「 p ならば q 」と書かれることが多い。命題「 p ならば q 」を「 $p \Rightarrow q$ 」とも書く。このとき p を仮定、 q を結論という。また、 $p \Rightarrow q$ が真のとき、 $P \subset Q$ という包含関係が成り立っているということである。



また、反例が挙げられるときは、命題 $p \Rightarrow q$ が偽である。また、 $p \Rightarrow q$ と、 $q \Rightarrow p$ が成り立つとき、まとめて $p \Leftrightarrow q$ と書き、 p と q は同値であるという。

- 例) 命題 $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ には反例 $x = -3$ がある。よってこの命題は偽。

2. 十分条件・必要条件

2つの条件 p 、 q について、命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき、 p は q であるための十分条件である、 q は p であるための必要条件であるという。

- 例) 命題 $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ は真である。
 $x = 3$ は $x^2 = 9$ であるための十分条件であり、
 $x^2 = 9$ は $x = 3$ であるための必要条件である。

また、 $p \Rightarrow q$ も $q \Rightarrow p$ も成り立つとき、 p は q であるための必要十分条件であるという。

といっても、分かりにくいので、真になる命題 $p \Rightarrow q$ に対し、

$p \Rightarrow q$
十分に必要

と、覚えていただければ良い。矢印の方向に、「十分に必要」と唱えるだけで、どちらが十分条件で、どちらが必要条件かが、分かる。十分条件・必要条件は、No.3 捕捉プリントでまた詳しく解説する。

◇問題

1. x は実数とする。このとき、次の空欄の中に適切なものを、下の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでも良い。

①必要十分条件である

②必要条件であるが、十分条件でない

③十分条件であるが、必要条件でない

④必要条件でも十分条件でもない

(1) $x = 2$ は $x^2 = 2x$ であるための 。

(2) $x > 0$ は $x \neq 1$ であるための 。

(3) 2つの三角形の面積が等しいことは、2つの三角形が合同であるための 。

(4) $\triangle ABC$ において、 $AB^2 + BC^2 = CA^2$ であることは、 $\triangle ABC$ が $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形であるための 。

数学 I 第 2 章 集合と命題 No.3 補足

学習のねらい

十分条件・必要条件の理解を深め、条件の“否定”を理解しよう！

1. 十分条件・必要条件の補足

例えば、「愛知県ならば日本だ」という命題があったとしよう。このとき、この命題は真だから、愛知県が十分条件で、日本が必要条件である。

愛知県と言ってしまうと、日本ということは十分に伝わる。一方で、愛知県であるためには、少なくとも日本である必要があるよね。このように考えると、十分条件・必要条件の名前の意味が分かるだろう。

2. 条件の否定

条件 p に対して、「 p でない」も条件である。条件「 p でない」を条件 p の否定といい、 $\bar{p}$ で表す。 $\bar{\bar{p}}$ 、すなわち、 $\bar{p}$ の否定は、 p である。

例) 「 x は奇数である」の否定は、「 x は奇数でない」つまり、「 x は偶数である」となる。

また、

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

が成り立つ。(条件のド・モルガンの法則)

Topic—自然数の個数と整数の個数はどちらが多い？

自然数と整数はどちらが多いか？という質問をされたら、「整数！」と答える人が多いだろう。なぜなら、自然数は、整数の正の数のみのことを指すからだ。しかし本当に整数の方が多いのだろうか？無限個の数を扱うと、実は変なことが起きてしまう。

自然数全体の集合と整数全体の集合は、どちらも無限集合なので、個数を数えることはできない。よって、集合の要素の個数を拡張した「濃度」という概念を使う。この濃度の大小によって、無限集合の「大きさ」を比べることができる。

有限集合の場合、濃度は、集合の個数のことを表す。また、自然数全体の集合と、整数全体の集合の濃度は、実は同じなのである。よって、数学の記事のサムネイルなどに、「自然数と整数は同じ個数！」と書かれるのである。しかし”「有限集合の場合」、濃度は、集合の個数のことを表す」であり、自然数全体の集合と、整数全体の集合は、無限集合なので、単に個数が濃度とは言えない。これがトリックである。

結論としては、「無限」を扱うときは、変なことが起きるのだ。」と理解してくれば良い。いつか役立つ日が来る。

久々にイラストが載せられた・・・。

だいぶやることが詰まってきている・・・。

やべえ・・・。



◇問題

1. x 、 y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x \leq -3$ (2) $x + y > 0$ (3) x は無理数である

(4) $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ (5) $x \leq 2$ または $x \geq 5$

(6) x 、 y の少なくとも一方は有理数である

2. 次の に最も適する語句を(ア)～(エ)から選べ。 x 、 y は実数とする。

(1) $x < 1$ は $x \leq 1$ であるための 。

(2) $x < y$ は $x^4 < y^4$ であるための 。

(3) $xy + 1 = x + y$ は x 、 y のうち少なくとも1つは1であるための 。

(4) $\triangle ABC$ において、 $\angle A < 90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 。

(ア)必要十分条件である

(イ)必要条件であるが、十分条件でない

(ウ)十分条件であるが、必要条件でない

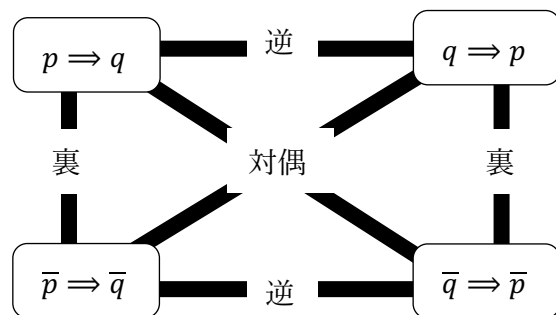
(エ)必要条件でも十分条件でもない

数学 I 第 2 章 集合と命題 No.4

学習のねらい

命題の逆・裏・対偶を理解し、命題の真偽を判定できるようになろう！

命題 $p \Rightarrow q$ に対して、
 $q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の 逆
 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の 裏
 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の 対偶
 という。



例) x を実数とすると、命題「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」の逆、裏、対偶

逆は $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

裏は $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$

対偶は $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

この例の命題「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」は真である。しかし、この命題の逆「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ 」は $x = -1$ が反例となり、偽である。よって、命題が真であっても、その逆は真であるとは限らない！！のである。

同様に、命題が偽であるとき、その逆は真であったり、偽であったりする。

また、条件 p, q に対し、以下の表を考える。

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
○	○	×	×	○	○
○	×	×	○	×	×
×	○	○	×	○	○
×	×	○	○	○	○

注) ○が真で×が偽という意味。このような表を真理値表という。

まず、 p と q が正しいときと間違っているときの組み合わせ方 4 パターンを並べる。すると、 $\bar{p}$ は p の否定なので、○と×が入れ替わる。 $\bar{q}$ も同様。

そして、○ならば○は当然○なので、 $p \Rightarrow q$ の 1 行目は○。そして、×ならば×や×ならば○に関して。命題の特徴なのだけど、仮定が間違っている時は、その命題は真となる。例えば、「 $1 = 2 \Rightarrow 0$ は無理数」という命題は、仮定が間違っているから真となる。

このルールに従って、○と×を打っていくと、 $p \Rightarrow q$ と $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の○と×の場所が一致した。

よって、命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の真偽は一致すると言える。

これとても大事。理屈が分からなくても良いから、「命題とその対偶は一致するんだ～」と覚えておいて欲しい。

◇問題

1. x 、 y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、裏、対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

$$(1) x = 0 \Rightarrow xy = 0 \quad (2) xy > 0 \Rightarrow 「x > 0 \text{ かつ } y > 0」$$

2. n は整数とする。次の命題を証明せよ。

n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。

数学 I 第 2 章 集合と命題 No.5

学習のねらい

背理法を理解し、証明をできるようになろう！

背理法とは、証明の一つの方法である。まず例を見て欲しい。

例) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、2つの整数 p 、 q を使って、 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ と

表せる。(ただし、 p 、 q は互いに素な数とする。)

よって、 $p = \sqrt{2}q$ となる。

両辺を二乗して、 $p^2 = 2q^2$ 。

よって、 p^2 は2の倍数である。ゆえに p は2の倍数である。…①

よって、 $p = 2x$ (x は整数)とできる。

これを代入して、 $4x^2 = 2q^2$ 。 ゆえに $2x^2 = q^2$ 。

よって、 q^2 は2の倍数である。ゆえに q は2の倍数である。…②

①、②より p と q は2の倍数である。しかし、 p と q は互いに素であるため、これは矛盾である。

よって、 $\sqrt{2}$ は無理数。

注) 互いに素とは、2つの整数が1以外の共通の約数を持たない状態のことを言う。

このように、直接証明することが難しい場合、否定を考え、矛盾が発生することを言えば良い。このような証明の仕方を背理法という。

Topic—国立大学と私立大学

国立大学と私立大学って何が違うのだろう。やっぱりお金？まあ、イメージだとそうだね。学費が全然違うっていうのは、その通り。

他にも、あって、例えば、受験するときに受ける科目数が違う。一般的に、国立大学は、共通テストを受けなければならないので、国・数・理・社・英・情の6教科を受けなければならない。そして各大学で行われる2次試験を受けて合格か不合格かが決まる。

一方で、私立大学は、理系なら数・英・理、文系なら国・英・社、の3教科を受ければ良いという場合がほとんど。(なんなら、もっと少ない科目数で良いところもある。)

自分が、国立を最終ゴールするのなら、学校で受ける全ての科目に力を入れて欲しいし、私立なら、受験する科目を全て強くして欲しいなと思う。

これにて、第2章 集合と命題は終わり！

次は2次関数です！

さてさて……。難くなるよ……。

頑張ろうね。



◇問題

1. 円周率 π が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。
 $\sqrt{\pi}$ は無理数である。

2. $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。ただし次の命題が成り立つことを用いて良いものとする。
「 n を整数とすると、 n^2 が3の倍数ならば、 n は3の倍数である。」