数学Ⅰ　第２章　集合と命題　No.３補足

学習のねらい

十分条件・必要条件の理解を深め、条件の”否定”を理解しよう！

1.十分条件・必要条件の補足

例えば、「愛知県ならば日本だ」という命題があったとしよう。このとき、この命題は真だから、愛知県が十分条件で、日本が必要条件である。

愛知県と言ってしまえば、日本ということは十分に伝わる。一方で、愛知県であるためには、少なくとも日本である必要があるよね。このように考えると、十分条件・必要条件の名前の意味が分かるだろう。

2.条件の否定

条件pに対して、「pでない」も条件である。条件「pでない」を条件pの**否定**といい、$\overline{p}$で表す。$\overline{\overline{p}}$、すなわち、$\overline{p}$の否定は、pである。

例)「xは奇数である」の否定は、「xは奇数でない」つまり、「xは偶数である」となる。

また、

$$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}\text{または}\overline{q}$$
$$\overline{p\text{または}q} \Leftrightarrow \overline{p}\text{かつ}\overline{q}$$

が成り立つ。（条件のド・モルガンの法則）

Topic―自然数の個数と整数の個数はどちらが多い？

自然数と整数はどちらが多いか？という質問をされたら、「整数！」と答える人が多いだろう。なぜなら、自然数は、整数の正の数のみのことを指すからだ。しかし本当に整数の方が多いのだろうか？無限個の数を扱うと、実は変なことが起きてしまう。

自然数全体の集合と整数全体の集合は、どちらも無限集合なので、個数を数えることはできない。よって、集合の要素の個数を拡張した「濃度」という概念を使う。この濃度の大小によって、無限集合の「大きさ」を比べることができる。

有限集合の場合、濃度は、集合の個数のことを表す。また、自然数全体の集合と、整数全体の集合の濃度は、実は同じなのである。よって、数学の記事のサムネイルなどに、「自然数と整数は同じ個数！」と書かれるのである。しかし”「有限集合の場合”、濃度は、集合の個数のことを表す」であり、自然数全体の集合と、整数全体の集合は、無限集合なので、単に個数が濃度とは言えない。これがトリックである。

結論としては、「”無限”を扱うときは、変なことが起きるのだ。」と理解してくれれば良い。いつか役立つ日が来る。

久々にイラストが載せられた・・・。

だいぶやることが詰まってきている・・・。

やべぇ・・・。

◊問題

1.　x、yは実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)$x \leqq -3$　(2)$x+y>0$　(3)xは無理数である

(4)$x \neq 0$ かつ$y \neq 0$　(5)$x \leqq 2$ または$x \geqq 5$

(6)x、yの少なくとも一方は有理数である

2.　次の$\boxed{}$に最も適する語句を(ア)～(エ)から選べ。x、yは実数とする。

(1) $x<1$は$x \leqq 1$であるための$\boxed{}$。

(2) $x<y$は$x^4<y^4$であるための$\boxed{}$。

(3) $xy+1=x+y$はx、yのうち少なくとも 1 つは 1 であるための$\boxed{}$。

(4) △ABC において、∠A< 90°は、△ABC が鋭角三角形であるための$\boxed{}$。

(ア)必要十分条件である

(イ)必要条件であるが、十分条件でない

(ウ)十分条件であるが、必要条件でない

(エ)必要条件でも十分条件でもない