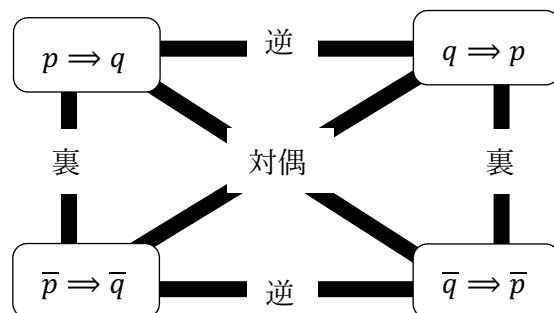


数学 I 第 2 章 集合と命題 No.4

学習のねらい

命題の逆・裏・対偶を理解し、命題の真偽を判定できるようになろう！

命題 $p \Rightarrow q$ に対して、
 $q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の 逆
 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の 裏
 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の 対偶
 という。



例) x を実数とすると、命題「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」の逆、裏、対偶

逆は $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

裏は $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$

対偶は $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

この例の命題「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」は真である。しかし、この命題の逆「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ 」は $x = -1$ が反例となり、偽である。よって、命題が真であっても、その逆は真であるとは限らない!!!のである。

同様に、命題が偽であるとき、その逆は真であったり、偽であったりする。

また、条件 p, q に対し、以下の表を考える。

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
○	○	×	×	○	○
○	×	×	○	×	×
×	○	○	×	○	○
×	×	○	○	○	○

注) ○が真で×が偽という意味。このような表を真理値表という。

まず、 p と q が正しいときと間違っているときの組み合わせ方 4 パターンを並べる。すると、 \bar{p} は p の否定なので、○と×が入れ替わる。 \bar{q} も同様。

そして、○ならば○は当然○なので、 $p \Rightarrow q$ の 1 行目は○。そして、×ならば×や×ならば○に関して。命題の特徴なのだけど、仮定が間違っている時は、その命題は真となる。例えば、「 $1 = 2 \Rightarrow 0$ は無理数」という命題は、仮定が間違っているから真となる。

このルールに従って、○と×を打っていくと、 $p \Rightarrow q$ と $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の○と×の場所が一致した。

よって、命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の真偽は一致すると言える。

これとても大事。理屈が分からなくても良いから、「命題とその対偶は一致するんだ～」と覚えておいて欲しい。

◇問題

1. x 、 y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、裏、対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

$$(1) x = 0 \Rightarrow xy = 0 \quad (2) xy > 0 \Rightarrow 「x > 0 \text{ かつ } y > 0」$$

2. n は整数とする。次の命題を証明せよ。

n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。