

数学 I 第 3 章 2 次関数 No. 1

学習のねらい

関数とは何かを理解し、高校から出る様々な用語に慣れよう！

1. 関数とは

$y = 3x + 1$ や $y = 3x^2$ などは、“関数”と中学で習ったと思う。しかし、関数の定義を答えられる人は少ないだろう。

関数の定義

2 つの変数 x 、 y があって x の値を決めるとそれに対応して y の値がただ 1 つに定まるとき、 y は x の関数であるという。

自動販売機で、お金を入れて、ボタンをポチッと押したら飲み物が出てくる。つまり、対応関係があるということだ。しかし、150 円の飲み物を買おう！！という気持ちで行くと、選択肢がたくさんある。これは関数ではない、ということだ。

y が x の関数であることを文字 f などを用いて $y = f(x)$ と表す。またこの関数を、単に関数 $f(x)$ ともいう。

例) $y = 3x + 1$ は $f(x) = 3x + 1$ と表せる。このとき、 $f(3)$ とは、与えられた関数に、 $x = 3$ を代入することであり、 $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$ となる。

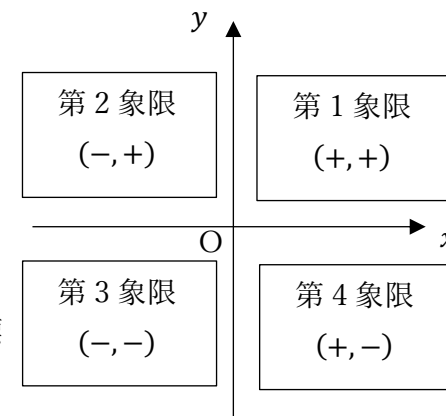
2. 定義域と値域

変域という言葉があったと思う。高校からは、 x のとりうる値の範囲 (x の変域) のことを **定義域** という。また、 x が定義域全体を動くとき、 $f(x)$ のとりうる値の範囲 (y の変域) のことを **値域** という。

3. 第○象限

座標平面には 4 つのエリアがある。右図のように、 x 軸と y 軸で区切られたエリアごとに第○象限(しょうげん)と名前がつけられている。第 1 象限から反時計回りで数字がついている。

$(+, +)$ などはその象限の x 座標と y 座標の符号を表している。



4. 1 次関数

$y = ax + b$ ($a \neq 0$, b は実数) という形で表された関数を **1 次関数** という。中学で習った通り、1 次関数は直線になる。また、2 点 (x, y) と (x_1, y_1) を結んだ直線の傾きは一定の値 m となる。

よって、 $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ となる。これを式変形することで以下を得られる。

① 傾きが m で、点 (x_1, y_1) を通る直線の公式

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

② 2 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) を通る直線の公式

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

◇問題

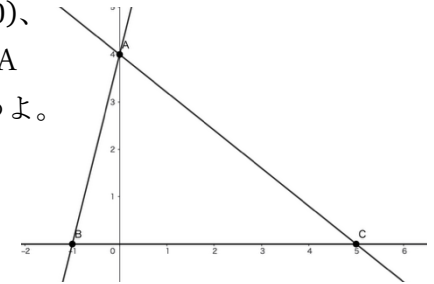
1. 次の関数のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。

$$y = -3x + 2 \quad (-2 \leq x \leq 3)$$

2. 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

$$(1) y = -5x - 5 \quad (-3 \leq x \leq 1) \quad (2) y = 2x + 3 \quad (0 \leq x < 2)$$

3. 右の図のように、3点 $A(0, 4)$ 、 $B(-1, 0)$ 、 $C(5, 0)$ がある。このとき点 A を通り、 $\triangle ABC$ の面積を2等分する直線の方程式を求めよ。



4. $f(x) = 4x - 3$ 、 $g(x) = -3x^2 + 2x$ のとき、次の値を求めよ。

$$f\left(\frac{3}{2}\right), f(-2), g(3a), g(a-2)$$

5. 次の関数のグラフを書け。

$$y = |x - 1|$$

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.2

学習のねらい

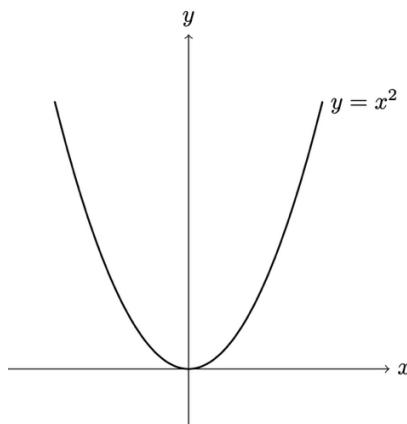
2 次関数を思い出し、点の平行移動について理解しよう！

1. $y=ax^2$ のグラフ

中学で習った $y = ax^2$ を復習しよう。
放物線と呼ばれる右のような曲線だ。

しかし、これは必ず原点を通っていた。つまり、2 次関数と呼ばれるものの一部であったのだ。高校からは、原点を通らない放物線を考える。

以降、 $y = ax^2$ も 2 次関数と呼ぶ。



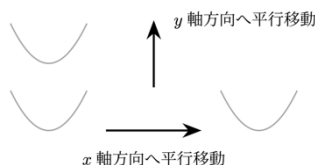
2. 平行移動

$y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は与えられた定数で、 $a \neq 0$) で表される関数を 2 次関数 という。また、平面上で、図形上の各点を一定の向きに、一定の距離だけ動かすことを 平行移動 という。 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $y = ax^2$ を平行移動したものになる。では平行移動はどうやるのか？

平行移動をするときは、以下の通りに式を書き換える。

x 軸方向へ p だけ平行移動： $x \rightarrow x - p$

y 軸方向へ q だけ平行移動： $y \rightarrow y - q$



例えば、2 次関数 $y = 2x^2$ について、 x 軸に $+3$ 、 y 軸に $+2$ 平行移動させたいならば、

x 軸方向に $+3$ 平行移動： $y = 2(x - 3)^2$

y 軸方向に $+2$ 平行移動： $y - 2 = 2x^2$

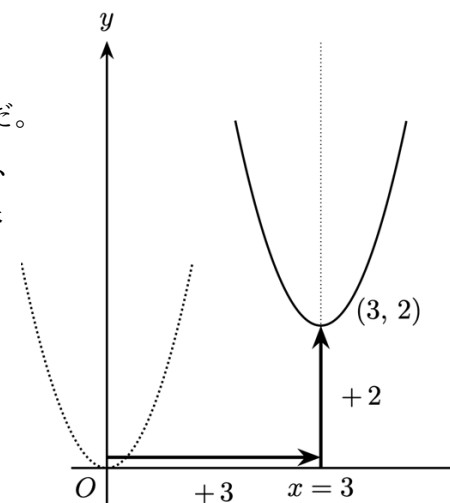
となり、これを合体して、

x 軸方向に $+3$ 平行移動、 y 軸方向に $+2$ 平行移動： $y - 2 = 2(x - 3)^2$
つまり、 $y = 2(x - 3)^2 + 2$ となる。 $y = 2(x - 3)^2 + 2$ は、整理すると、 $y = 2x^2 - 12x + 20$ となり、 $y = ax^2 + bx + c$ の形になることがわかる。

何が起きたのかをグラフを使って確認すると、「点線のグラフが実線のグラフに平行移動した」ということだ。

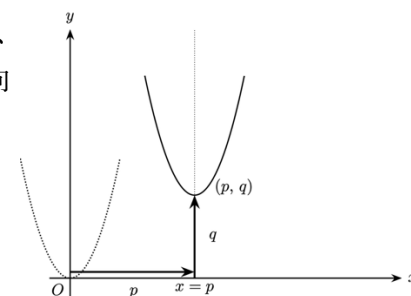
放物線の頂点は $(3, 2)$ となる。また、 y 軸に平行で放物線の頂点を通る直線を放物線の 軸 という (点線)。つまり軸の方程式は $x = 3$ である。

これらを一般化しておこう。



2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。

{ 頂点の座標は (p, q)
軸の方程式は $x = p$



◇問題

1. 次の2次関数のグラフは、2次関数 $y = -x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか答えよ。また、それぞれのグラフをかき、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 1$ (2) $y = -(x + 3)^2$ (3) $y = -(x - 4)^2 + 2$

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.3

学習のねらい

平方完成ができるようになるう!!!

No.2 で $y = (x - p)^2 + q$ のグラフから頂点や軸の方程式が求められグラフをかけることが分かった。では、 $y = ax^2 + bx + c$ の形で表されている式はどのようにグラフをかけば良いのだろうか。 $y = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフをかこうと思ってもなかなか難しい。

つまり、 $y = ax^2 + bx + c$ は、 $y = (x - p)^2 + q$ の形に変形する必要がある。この作業を平方完成という。

例) $y = 2x^2 - 4x + 5$ を平方完成せよ。

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 5 && \text{定数項以外をくくる} \\ &= 2(x^2 - 2x) + 5 && \leftarrow x^2 - 2x \\ &= 2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 5 && = (x - 1)^2 - 1^2 \\ &= 2\{(x - 1)^2 - 1^2\} + 5 && \leftarrow \{ \} \text{を外して整理} \\ &= 2(x - 1)^2 - 2 + 5 \\ &= 2(x - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

となり、 $y = 2x^2 - 4x + 5$ は、 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ に変形できる。よって、頂点は $(1, 3)$ であり、軸の方程式は $x = 1$ である。

これを $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ で考えよう!

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

となる。よって、以下の結論が得られる。

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ のグラフの

$$\text{軸の方程式は } x = -\frac{b}{2a}, \text{ 頂点の座標は } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

である。

軸の方程式は、今後使う場面があるので覚えておこう!! 頂点の座標の方は覚える必要はない。毎回、平方完成して求めていく!!

平方完成で、躓く人が多いから、
何度も練習してできるようになろう!



◇問題

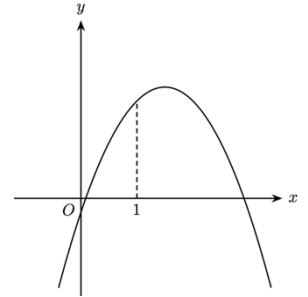
1. 次の2次関数のグラフをかき、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = x^2 + 4x + 1$ (2) $y = -2x^2 - 8x - 3$

(3) $y = -2x^2 + 5x - 2$ (4) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$

2. 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を調べよ。

(1) a (2) b (3) c (4) $a + b + c$



数学 I 第 3 章 2 次関数 No.4

学習のねらい

対称移動について理解しよう！

2 次関数の 3 パターンの表し方についてポイントを押さえよう！

1. 対称移動

2 次関数のグラフを平行移動する方法を No.2 で学習した。

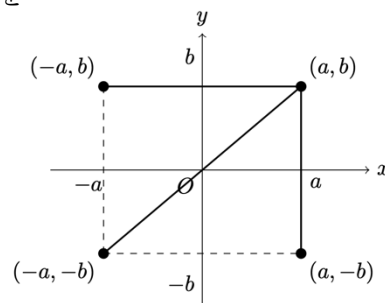
そして、今回は、移動の中でも対称移動を扱う。対称移動は 3 種類ある。

点 (a, b) はそれぞれ次の点に移る。

x 軸に関する対称移動： $(a, -b)$

y 軸に関する対称移動： $(-a, b)$

原点に関する対称移動： $(-a, -b)$



対称移動は頂点に着目すれば覚えることは何もない！例題を通してやってみよう。

例) 2 次関数 $y = -x^2 + 4x - 1$ のグラフを (1) x 軸 (2) y 軸 (3) 原点のそれぞれに関して対称移動した曲線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

平方完成すると $y = -(x - 2)^2 + 3$ となる。頂点は $(2, 3)$ である。

- (1) x 軸に関して対称移動させると、凸の上下が変わる。つまり、 $-x^2$ の係数のプラスマイナスが変わる。また、頂点は、 $(2, -3)$ になる。よって、 $y = (x - 2)^2 - 3$ 。これを展開して、 $y = x^2 - 4x + 1$ 。
- (2) y 軸に関して対称移動させると、凸の上下は変わらない。つまり、 $-x^2$ の係数のプラスマイナスが変わらない。また、頂点は、 $(-2, 3)$ になる。よって、 $y = -(x + 2)^2 + 3$ 。これを展開して、 $y = -x^2 - 4x + 1$ 。
- (3) 原点に関して対称移動させると、凸の上下が変わる。つまり、 $-x^2$ の係数のプラスマイナスが変わる。また、頂点は、 $(-2, -3)$ になる。よって、 $y = (x + 2)^2 - 3$ 。これを展開して、 $y = x^2 + 4x + 1$ 。

ちなみに元の式と比べると以下が分かる。

x 軸対称 $\rightarrow y$ を $-y$ に書き換える。 y 軸対称 $\rightarrow x$ を $-x$ に書き換える。

原点对称 $\rightarrow y$ を $-y$ に、 x を $-x$ に書き換える。

2.2 2 次関数の表し方

ここまでで、 $y = a(x - p)^2 + q$ と $y = ax^2 + bx + c$ の形を学んだ。しかし、もう一つあって、 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ の形を考えることもある。例えば、 $y = 2(x - 1)(x - 3)$ は展開すると、 $y = 2x^2 - 8x + 6$ 。しかし、 $y = 2(x - 1)(x - 3)$ は、 $y = 0$ のとき、 $0 = 2(x - 1)(x - 3)$ 。右辺は因数分解されているので、 $x = 1, 3$ とわかる。つまり、 $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ を通る放物線であることが分かる！！

それぞれに良い使い方があるので、問題を通して確認しよう！

◇問題

1. 2次関数 $y = -x^2 + 2x + 1$ のグラフを(1) x 軸 (2) y 軸 (3) 原点のそれぞれに関して対称移動した曲線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

2. 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が $(1, 2)$ で、点 $(3, 6)$ を通る。
- (2) 軸が直線 $x = -1$ で、2点 $(1, 3)$ 、 $(-2, -3)$ を通る。
- (3) 3点 $(1, -2)$ 、 $(-2, -5)$ 、 $(3, 10)$ を通る。
- (4) x 軸と2点 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ で交わり、点 $(2, -6)$ を通る。

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.5

学習のねらい

2 次関数の最大値・最小値について理解しよう！

軸が動くタイプの最大値・最小値をマスターしよう！

1. 最大値・最小値

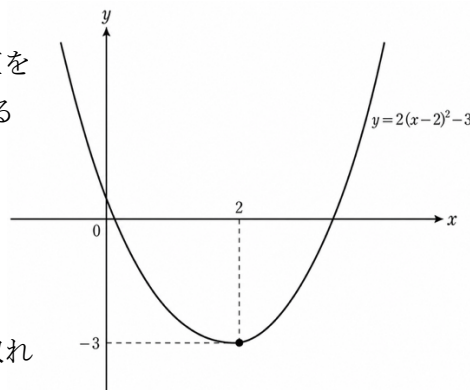
$y = 2x^2 - 8x + 5$ の最大値と最小値を求めることを考えよう。平方完成すると、 $y = 2(x - 2)^2 - 3$ となる。

よって、この関数は、

$x = 2$ で 最小値 -3

をとる。

また、 y はいくらでも大きな値を取れるので 最大値 は無い。

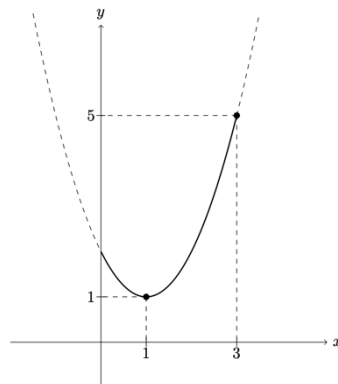


2. 定義域に制限がある場合の最大・最小

では、 $y = x^2 - 2x + 2$ ($0 \leq x \leq 3$) の場合はどうなるだろうか。さっきの問題とは違い、定義域(x の範囲)が設定されている。

よって、答えは、最大値 $x = 3$ で 5、最小値 $x = 1$ で 1 が答えとなる。

ちなみに、定義域が $0 < x < 3$ の場合、「最大値はない」が答えになる。



3. 軸が動くタイプの最大・最小

最大値・最小値の問題で、「色々なものが動くとき」が厄介である。No.5 で軸が動くタイプ、No.6 で定義域が動くタイプの問題を扱う。例題を確認しながら、解けるようになっていこう！

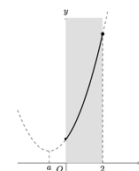
例) 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ の $0 \leq x \leq 2$ における最小値を、 a の値の範囲によって、場合分けして求めよ。(a は定数とする。)

この関数を平方完成すると、 $y = (x - a)^2 + 1$ である。よって、最小値は $x = a$ のとき 1 と答えるのは間違い！！なぜかという、この関数には定義域があって、軸が $x = a$ にあるから、グラフがどこにあるかが分からない・・・。つまり場合分けする必要がある。

(i) $a < 0$ のとき

この関数のグラフは、右図の実線部分。

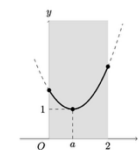
よって、 $x = 0$ で最小値 $a^2 + 1$ をとる。



(ii) $0 \leq a \leq 2$ のとき

この関数のグラフは、右図の実線部分。

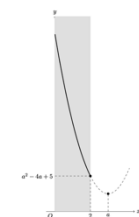
よって、 $x = a$ で最小値 1 をとる。



(iii) $2 < a$ のとき

この関数のグラフは、右図の実線部分。

よって、 $x = 2$ で最小値 $a^2 - 4a + 5$ をとる。



よって、答えは、

$a < 0$ のとき $x = 0$ で最小値 $a^2 + 1$

$0 \leq x \leq 2$ のとき $x = a$ で最小値 1

$2 < a$ のとき $x = 2$ で最小値 $a^2 - 4a + 5$

◇問題

1. 次の関数の最大値、最小値があれば、それを求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = -x^2 - 4x - 1$ (2) $y = 2x^2 + 4x + 3$

(3) $y = x^2 - 2x + 2$ ($0 < x < 3$) (4) $y = -x^2 + 1$ ($1 \leq x \leq 3$)

2. 関数 $y = x^2 + 2x + c$ ($-2 \leq x \leq 2$)の最大値が5となるように、定数 c の値を求めよ。

3. a は定数とする。 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3a$ について、次のものを求めよ。

(1) 最大値 (2) 最小値

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.6

学習のねらい

定義域が動くタイプの最大値・最小値をマスターしよう！

1. 定義域が動くタイプの最大・最小

No.5 で、軸が動くタイプの問題を考えた。今回は、定義域が動くタイプの問題。

例) $a \leq x \leq a+2$ における関数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ の最小値を求めよ。

まずは、平方完成。 $f(x) = (x-1)^2 + 1$ となる。No.5 のときと同じく「最小値は1」と答えるのは間違い。今回は、定義域が a の値によって変化する。与式の頂点は $(1, 1)$ で軸は直線 $x = 1$ である。

(i) $a+2 < 1$ すなわち $a < -1$ のとき

グラフの軸は定義域の右側にある。[図 1]

よって、 $x = a+2$ のときに最小値を

とる。その値は、

$$\begin{aligned} f(a+2) &= (a+2-1)^2 + 1 \\ &= (a+1)^2 + 1 \\ &= a^2 + 2a + 2 \end{aligned}$$

(ii) $a \leq 1$ かつ $1 \leq a+2$ すなわち $-1 \leq a \leq 1$ のとき

グラフの軸は定義域の内部にある。[図 2]

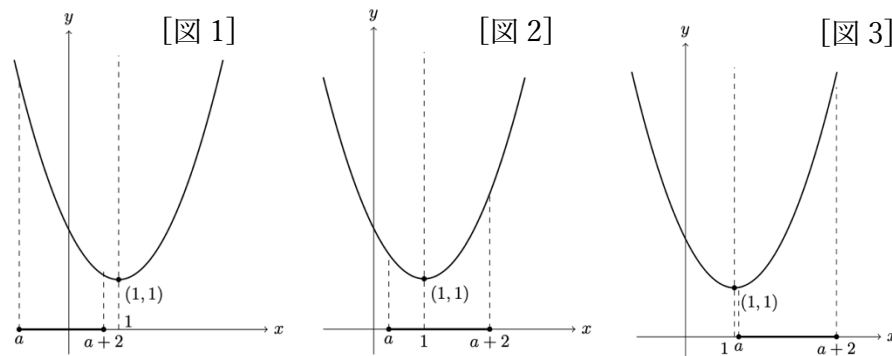
よって、 $x = 1$ のとき最小値1をとる。

(iii) $1 < a$ のとき

グラフの軸は定義域の左側にある。[図 3]

よって、 $x = a$ のときに最小値を

とる。その値は、 $f(a) = a^2 - 2a + 2$



以上より、最小値は、

$$\begin{cases} a < -1 \text{ のとき} & x = a+2 \text{ で最小値 } a^2 + 2a + 2 \\ -1 \leq a \leq 1 \text{ のとき} & x = 1 \text{ で最小値 } 1 \\ 1 < a \text{ のとき} & x = a \text{ で最小値 } a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

結局、軸が動く問題も、定義域が動く問題も、本質的に解き方は変わらない。なので、問題を解いて、できるようになろう！

2. 最大値について

実は、最大値については扱ってこなかった。ほとんど同じ考え方で解ける。定義域の真ん中(先の例なら、 $a+1$)が、軸より左にあるか右にあるかという2つの場合分けで解ける。これは◇問題で慣れて欲しい。

◇問題

1. a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2x$ ($a \leq x \leq a + 1$)について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.7

学習のねらい

判別式を理解しよう！

2 次方程式の解と、グラフの位置関係を理解しよう！

1. 判別式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \textcircled{1}$ ($a \neq 0$) の実数解とその個数について考えよう。解の公式を使うと、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となる。今回はこの $\sqrt{\quad}$ の中身である $b^2 - 4ac$ に着目しよう。

この $b^2 - 4ac$ が、正の値ならば、 $\textcircled{1}$ は異なる 2 つの実数解を持つことになる。 $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 、 $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ のふたつ。

$b^2 - 4ac = 0$ ならば、実数解は 1 つになる。 $x = -\frac{b}{2a}$ のみである。イ

メージとしては、 $x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a}$ 、 $\frac{-b - \sqrt{0}}{2a}$ になっていて同じ値になっている状態。このように重複する解のことを **重解** という。

$b^2 - 4ac$ が負の値をとるときはどうか。 $\sqrt{\quad}$ の中身が負になるような実数は存在しないので、 $\textcircled{1}$ は実数解をもたないことになる。

つまり、方程式の解の個数を調べたいのであれば、いちいち解を求める必要はなく、 $b^2 - 4ac$ の正負を調べれば良いということだ。

この式のことを $\textcircled{1}$ の **判別式** といい、通常 D で表す。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において、判別式 $D = b^2 - 4ac$ とする。

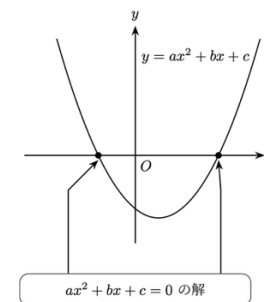
$D > 0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D = 0 \Leftrightarrow$ 重解 (1 つの実数解) をもつ

$D < 0 \Leftrightarrow$ 実数解をもたない

2.2 2 次方程式の解とグラフ

x 軸と交わる放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) $\cdots \textcircled{1}$ を考える。さて、この $\textcircled{1}$ が x 軸と交わっている点の x 座標はどうやって求めようか。 x 軸は $y = 0$ だから、 $\textcircled{1}$ に $y = 0$ を代入した式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \textcircled{2}$ を解いた解が x 軸との交点の x 座標になるはずだ。 $\textcircled{2}$ の解は、図のように視覚的にも捉えられる。



3. 放物線と直線の共有点

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ が共有点をもつとき、その x 座標はこれら 2 つの方程式から y を消去して得られる 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = mx + n$ の実数解である。

例) $y = x^2 - 4x + 5$ と $y = x + 1$ の共有点の座標を求めよ。

$x^2 - 4x + 5 = x + 1$ を解くと、 $x^2 - 5x + 4 = 0$ だから、 $x = 1, 4$ 。よって、これを $y = x + 1$ に代入して、 $x = 1$ のとき $y = 2$ 。 $x = 4$ のとき $y = 5$ 。よって、共有点の座標は $(1, 2)$ 、 $(4, 5)$ 。

重解になる場合は、放物線と直線が接しているということ。このように、**接する** といい、その共有点を **接点** という。

◇問題

1. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ (2) $x^2 + 6x + 9 = 0$ (3) $x^2 + x + 1 = 0$

2. 次の問いに答えよ。

(1) 2次方程式 $x^2 - 6x + m = 0$ が異なる2つの実数解をもつように、定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2 - mx + 2 = 0$ が重解を持つように、定数 m の値を定めよ。またそのときの重解を求めよ。

3. $y = x^2 - 4x + 5$ と $y = 2x - 4$ の共有点の座標を求めよ。

4. $y = x^2 - 1$ と $y = 2x - k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.8

学習のねらい

2 次不等式を解けるようになろう！

例) $x^2 - 2x - 3 > 0$ を解け。

このように左辺が x の 2 次式になる不等式を x についての 2 次不等式 という。

まず、2 次不等式は、このように考えよう。

「 $y = x^2 - 2x - 3$ について、 $y > 0$ となる x の範囲を求めよ。」と。では、 $y = x^2 - 2x - 3$ を描いてみよう。

すると、 $y = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ とできる。よって、 $y > 0$ となる部分は、

$$x < -1, 3 < x$$

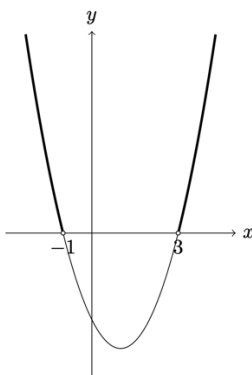
であることがわかる。このように 2 次不等式は必ずグラフを見て解くようにしよう。

では、次の場合はどうなるでしょう。

例) $x^2 - 2x + 1 > 0$ を解け。

このグラフを書くとちょっと違うことが起きる。

同じように考えると、「 $y = x^2 - 2x + 1$ について、 $y > 0$ となる x の範

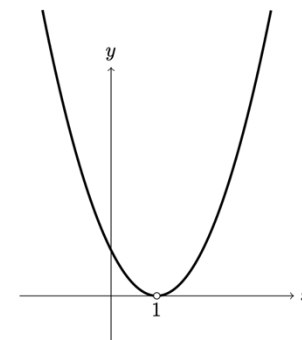


囲を求めよ。」となる。すると、 $y > 0$ となる部分は、

$$x < 1, 1 < x$$

つまり、「1 以外のすべての実数」が答えとなる。

このように 2 次不等式は様々な答えがあるので、問題を通じて慣れていこう。



Topic—放物線は身近にある

共通テストなどでよく使われるので、ここで日常に潜む放物線を知っておこう。

例えば、バスケットボールのシュートや噴水から出る水の軌跡は、放物線に近い形をしている。また、花火が打ち上がった後の動きも放物線として考えることができる。

物を放る線だからこそ、日常に繋がっていくわけだ。

他にも、1 個の販売価格を x 円、1 個あたりの原価を 70 円、1 日あたりに売り上げる個数を y 個、1 日あたりに得られる利潤を z 円としてみよう。このとき、1 個販売するごとに利益は $(x - 70)$ 円。一方、1 日に売り上げる個数は商品の販売価格が高くなると少なくなると考えられるので、 y は x が増加すると減少する。その例として、 $y = 170 - x$ ($70 \leq x \leq 170$) としてみよう。

このとき、 $z = (x - 70)y = (x - 70)(170 - x) = -x^2 + 240x - 11900$ となり、価格 x の 2 次関数となる。この式を平方完成することで、販売価格がいくらのときに、最大の利潤が得られるかが分かる。

◇問題

1. 次の2次不等式を解け。

(1) $x(x-3) < 0$ (2) $2x^2 - x - 4 \geq 0$

(3) $x^2 - 4x + 5 > 0$ (4) $-3x^2 + 8x - 6 > 0$

2. 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2 \geq 3x - 1 \\ 3x + 2 > 2x^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2 - 8x + 10 > 0 \\ 3 - 2x - x^2 \leq 0 \end{cases}$