数学Ⅰ　第３章　２次関数　No.３

学習のねらい

平方完成ができるようになろう！！！

No.2 で$y=(x-p)^2+q$のグラフから頂点や軸の方程式が求められグラフをかけることが分かった。では、$y=ax^2+bx+c$の形で表されている式はどのようにグラフをかけば良いのだろうか。$y=2x^2-4x+5$のグラフをかこうと思ってもなかなか難しい。

つまり、$y=ax^2+bx+c$は、$y=(x-p)^2+q$の形に変形する必要がある。この作業を平方完成という。

例） $y=2x^2-4x+5$を平方完成せよ。

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-4x+5 \\ &= 2(x^2-2x)+5 \\ &= 2(x^2-2x+1^2-1^2)+5 \\ &= 2\{(x-1)^2-1^2\}+5 \\ &= 2(x-1)^2-2+5 \\ &= 2(x-1)^2+3 \end{aligned}$$

定数項以外をくくる

x^2-2x
$=(x-1)^2-1^2$

{　}を外して整理

となり、$y=2x^2-4x+5$は、$y=2(x-1)^2+3$に変形できる。よって、頂点は$(1,3)$であり、軸の方程式は$x=1$である。

これを$y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$で考えよう！

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a} \end{aligned}$$

となる。よって、以下の結論が得られる。

> $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$のグラフの
>
> 軸の方程式は$x=-\frac{b}{2a}$、頂点の座標は$\left(-\frac{b}{2a},\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$
>
> である。

軸の方程式は、今後使う場面があるので覚えておこう！！頂点の座標の方は覚える必要はない。毎回、平方完成して求めていく！！

平方完成で、躓く人が多いから、

何度も練習してできるようになろう！

©算数・数学のアトリエ

◊問題

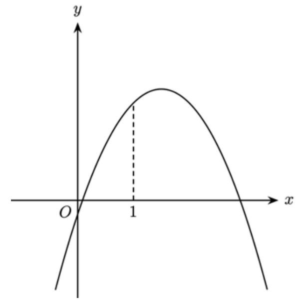
1.　次の 2 次関数のグラフをかき、その軸と頂点を求めよ。

（1）$y = x^2 + 4x + 1$　（2）$y = -2x^2 - 8x - 3$

（3）$y = -2x^2 + 5x - 2$　（4）$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$

2.　2 次関数$y = ax^2 + bx + c$のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を調べよ。

（1）a　（2）b　（3）c　（4）$a + b + c$



©算数・数学のアトリエ