

# 数学 I 第 3 章 2 次関数 No.5

## 学習のねらい

2 次関数の最大値・最小値について理解しよう！  
軸が動くタイプの最大値・最小値をマスターしよう！

### 1. 最大値・最小値

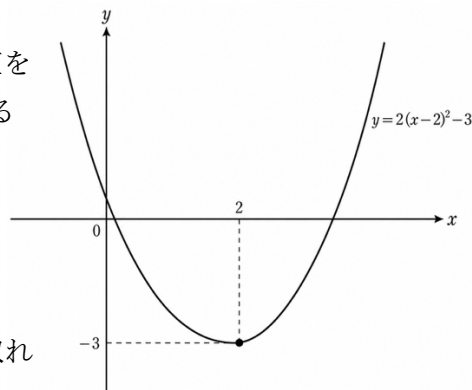
$y = 2x^2 - 8x + 5$  の最大値と最小値を求めることを考えよう。平方完成すると、 $y = 2(x - 2)^2 - 3$  となる。

よって、この関数は、

$$x = 2 \text{ で } \underline{\text{最小値}} -3$$

をとる。

また、 $y$  はいくらでも大きな値を取れるので 最大値 は無い。

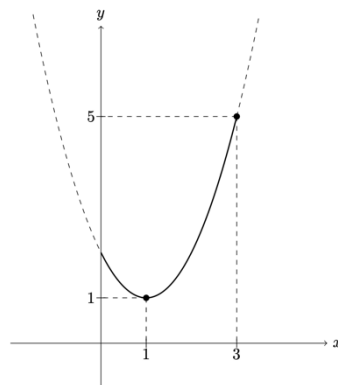


### 2. 定義域に制限がある場合の最大・最小

では、 $y = x^2 - 2x + 2$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) の場合はどうなるだろうか。さっきの問題とは違い、定義域 ( $x$  の範囲) が設定されている。

よって、答えは、最大値  $x = 3$  で 5、最小値  $x = 1$  で 1 が答えとなる。

ちなみに、定義域が  $0 < x < 3$  の場合、「最大値はない」が答えになる。



### 3. 軸が動くタイプの最大・最小

最大値・最小値の問題で、「色々なものが動くとき」が厄介である。No.5 で軸が動くタイプ、No.6 で定義域が動くタイプの問題を扱う。例題を確認しながら、解けるようになっていこう！

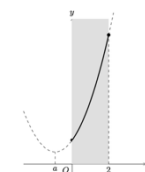
例) 2 次関数  $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$  の  $0 \leq x \leq 2$  における最小値を、 $a$  の値の範囲によって、場合分けして求めよ。(  $a$  は定数とする。 )

この関数を平方完成すると、 $y = (x - a)^2 + 1$  である。よって、最小値は  $x = a$  のとき 1 と答えるのは間違い！！なぜかという、この関数には定義域があって、軸が  $x = a$  にあるから、グラフがどこにあるかが分からない・・・つまり場合分けする必要がある。

(i)  $a < 0$  のとき

この関数のグラフは、右図の実線部分。

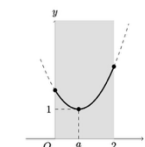
よって、 $x = 0$  で最小値  $a^2 + 1$  をとる。



(ii)  $0 \leq x \leq 2$  のとき

この関数のグラフは、右図の実線部分。

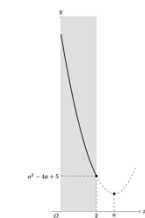
よって、 $x = a$  で最小値 1 をとる。



(iii)  $2 < a$  のとき

この関数のグラフは、右図の実線部分。

よって、 $x = 2$  で最小値  $a^2 - 4a + 5$  をとる。



よって、答えは、

$$a < 0 \text{ のとき } x = 0 \text{ で最小値 } a^2 + 1$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ のとき } x = a \text{ で最小値 } 1$$

$$2 < a \text{ のとき } x = 2 \text{ で最小値 } a^2 - 4a + 5$$

## ◇問題

1. 次の関数の最大値、最小値があれば、それを求めよ。また、そのときの $x$ の値を求めよ。

(1)  $y = -x^2 - 4x - 1$  (2)  $y = 2x^2 + 4x + 3$

(3)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $0 < x < 3$ ) (4)  $y = -x^2 + 1$  ( $1 \leq x \leq 3$ )

2. 関数 $y = x^2 + 2x + c$  ( $-2 \leq x \leq 2$ )の最大値が5となるように、定数 $c$ の値を求めよ。

3.  $a$ は定数とする。 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3a$ について、次のものを求めよ。

(1) 最大値 (2) 最小値