数学Ⅰ　第３章　２次関数　No.6

学習のねらい

定義域が動くタイプの最大値・最小値をマスターしよう！

1. 定義域が動くタイプの最大・最小

　No.5 で、軸が動くタイプの問題を考えた。今回は、定義域が動くタイプの問題。

例） $a \leqq x \leqq a+2$における関数$f(x) = x^2 - 2x + 2$の最小値を求めよ。

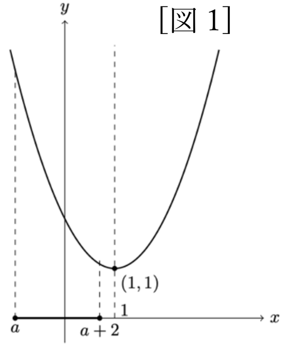
　まずは、平方完成。$f(x) = (x-1)^2 + 1$となる。No.5 のときと同じく「最小値は1」と答えるのは間違い。今回は、定義域がaの値によって変化する。与式の頂点は$(1,1)$で軸は直線$x = 1$である。

（ⅰ）$a + 2 < 1$すなわち$a < -1$のとき
　グラフの軸は定義域の右側にある。[図 1]
　よって、$x = a + 2$のときに最小値をとる。その値は、

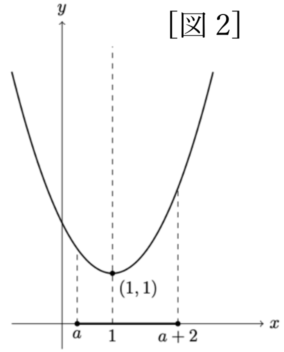
$$\begin{aligned} f(a+2) &= (a+2-1)^2 + 1 \\ &= (a+1)^2 + 1 \\ &= a^2 + 2a + 2 \end{aligned}$$

（ⅱ）$a \leqq 1$かつ$1 \leqq a + 2$すなわち$-1 \leqq a \leqq 1$のとき
　グラフの軸は定義域の内部にある。[図 2]
　よって、$x = 1$のとき最小値1をとる。

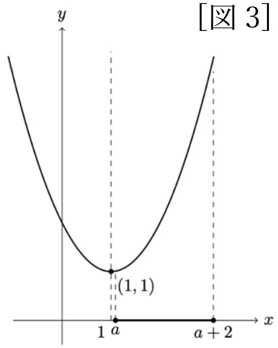
（ⅲ）$1 < a$のとき
　グラフの軸は定義域の左側にある。[図 3]
　よって、$x = a$のときに最小値をとる。その値は、$f(a) = a^2 - 2a + 2$



[図 1]



[図 2]



[図 3]

　以上より、最小値は、

$$\begin{cases} a < -1 \text{ のとき} \quad x = a + 2 \text{ で最小値} a^2 + 2a + 2 \\ -1 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき} \quad x = 1 \text{ で最小値 } 1 \\ 1 < a \text{のとき} \quad x = a \text{で最小値} a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

　結局、軸が動く問題も、定義域が動く問題も、本質的に解き方は変わらない。なので、問題を解いて、できるようになろう！

2. 最大値について

　実は、最大値については扱ってこなかった。ほとんど同じ考え方で解ける。定義域の真ん中(先の例なら、$a + 1$)が、軸より左にあるか右にあるかという２つの場合分けで解ける。これは◇問題で慣れて欲しい。

◊問題

1. aは定数とする。関数$y=x^2-2x\ (a \leqq x \leqq a+1)$について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。　(2) 最大値を求めよ。