数学Ⅰ　第３章　２次関数　No.7

学習のねらい

判別式を理解しよう！
２次方程式の解と、グラフの位置関係を理解しよう！

1. 判別式

２次方程式$ax^2+bx+c=0$…①の実数解とその個数について考えよう。解の公式を使うと、$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$となる。今回はこの$\sqrt{}$の中身である$b^2-4ac$に着目しよう。

このb^2-4acが、正の値ならば、①は異なる２つの実数解を持つことになる。$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$、$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$のふたつ。

$b^2-4ac=0$ならば、実数解は１つになる。$x=-\frac{b}{2a}$のみである。イメージとしては、$x=\frac{-b+\sqrt{0}}{2a}$、$\frac{-b-\sqrt{0}}{2a}$になっていて同じ値になっている状態。このように重複する解のことを重解という。

b^2-4acが負の値をとるときはどうなるだろうか。$\sqrt{}$の中身が負になるような実数は存在しないので、①は実数解をもたないことになる。

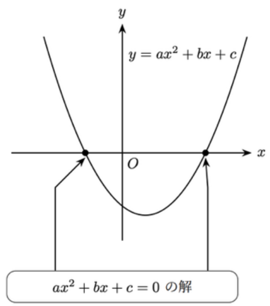
つまり、方程式の解の個数を調べたいのであれば、いちいち解を求める必要はなく、b^2-4acの正負を調べれば良いということだ。

この式のことを①の判別式といい、通常Dで表す。

２次方程式$ax^2+bx+c=0$において、判別式$D=b^2-4ac$とする。
$D>0\Leftrightarrow$異なる２つの実数解をもつ
$D=0\Leftrightarrow$重解(1つの実数解)をもつ
$D<0\Leftrightarrow$実数解をもたない

2. 2次方程式の解とグラフ

x軸と交わる放物線$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$…①を考える。さて、この①がx軸と交わっている点のx座標はどうやって求めようか。x軸は$y=0$だから、①に$y=0$を代入した式$ax^2+bx+c=0$…②を解いた解がx軸との交点のx座標になるはずだ。②の解は、図のように視覚的にも捉えられる。



3. 放物線と直線の共有点

２次関数$y=ax^2+bx+c$と直線$y=mx+n$が共有点をもつとき、そのx座標はこれら２つの方程式からyを消去して得られる2次方程式$ax^2+bx+c=mx+n$の実数解である。

例）$y=x^2-4x+5$と$y=x+1$の共有点の座標を求めよ。

$x^2-4x+5=x+1$を解くと、$x^2-5x+4=0$だから、$x=1$、4。よって、これを$y=x+1$に代入して、$x=1$のとき$y=2$。$x=4$のとき$y=5$。よって、共有点の座標は$(1,2)$、$(4,5)$。

重解になる場合は、放物線と直線が接しているということ。このようなとき、接するといい、その共有点を接点という。

◊問題

1.　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

（1）$2x^2+3x-1=0$　（2）x^2+6x+9　（3）$x^2+x+1=0$

2.　次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式$x^2-6x+m=0$が異なる 2 つの実数解をもつように、定数mの値の範囲を求めよ。

(2) 2 次方程式$x^2-mx+2=0$が重解を持つように、定数mの値を定めよ。またそのときの重解を求めよ。

3.　$y=x^2-4x+5$と$y=2x-4$の共有点の座標を求めよ。

4.　$y=x^2-1$と$y=2x-k$が接するとき、定数kの値を求めよ。