

数学 I 第 3 章 2 次関数 No.8

学習のねらい

2 次不等式を解けるようになろう！

例) $x^2 - 2x - 3 > 0$ を解け。

このように左辺が x の 2 次式になる不等式を x についての 2 次不等式 という。

まず、2 次不等式は、このように考えよう。
「 $y = x^2 - 2x - 3$ について、 $y > 0$ となる x の範囲を求めよ。」と。では、 $y = x^2 - 2x - 3$ を描いてみよう。

すると、 $y = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ とできる。よって、 $y > 0$ となる部分は、

$$x < -1, 3 < x$$

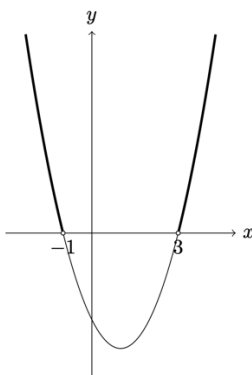
であることがわかる。このように 2 次不等式は必ずグラフを見て解くようにしよう。

では、次の場合はどうなるでしょう。

例) $x^2 - 2x + 1 > 0$ を解け。

このグラフを書くとちょっと違うことが起きる。

同じように考えると、「 $y = x^2 - 2x + 1$ について、 $y > 0$ となる x の範

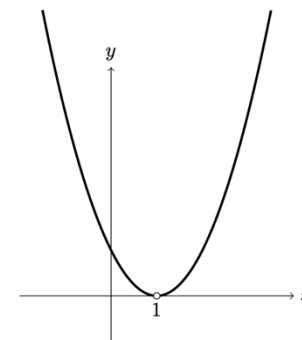


囲を求めよ。」となる。すると、 $y > 0$ となる部分は、

$$x < 1, 1 < x$$

つまり、「1以外のすべての実数」が答えとなる。

このように 2 次不等式は様々な答えがあるので、問題を通じて慣れていこう。



Topic—放物線は身近にある

共通テストなどでよく使われるので、ここで日常に潜む放物線を知っておこう。

例えば、バスケットボールのシュートや噴水から出る水の軌跡は、放物線に近い形をしている。また、花火が打ち上がった後の動きも放物線として考えることができる。

物を放る線だからこそ、日常に繋がっていくわけだ。

他にも、1 個の販売価格を x 円、1 個あたりの原価を 70 円、1 日あたりに売り上げる個数を y 個、1 日あたりに得られる利潤を z 円としてみよう。このとき、1 個販売するごとに利益は $(x - 70)$ 円。一方、1 日に売り上げる個数は商品の原価が高くなると少なくなると考えられるので、 y は x が増加すると減少する。その例として、 $y = 170 - x$ ($70 \leq x \leq 170$) としてみよう。

このとき、 $z = (x - 70)y = (x - 70)(170 - x) = -x^2 + 240x - 11900$ となり、価格 x の 2 次関数となる。この式を平方完成することで、販売価格がいくらのときに、最大の利潤が得られるかが分かる。

◇問題

1. 次の2次不等式を解け。

(1) $x(x-3) < 0$ (2) $2x^2 - x - 4 \geq 0$

(3) $x^2 - 4x + 5 > 0$ (4) $-3x^2 + 8x - 6 > 0$

2. 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2 \geq 3x - 1 \\ 3x + 2 > 2x^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2 - 8x + 10 > 0 \\ 3 - 2x - x^2 \leq 0 \end{cases}$