

数学 I 第 4 章 図形と計量 No.1

学習のねらい

三角比の定義を理解しよう！

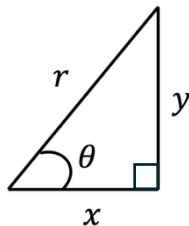
有名な角度の $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ の値を求められるようになろう！

1. 三角比の定義

一つの直線を用意して、斜辺の長さを r と固定して、直角三角形を作るにはあと何の情報が必要だろう。高さ？確かに高さが分かれば三角形が作れる。しかし角度が分かっても高さ、底辺の長さが決まる。そこで、その角度を θ (シータ) (ギリシャ文字だよ) としてみよう。

今回は斜辺が r と決まっているので角度が分かれば三角形ができる。つまり、角度によって、底辺と高さの辺の長さが決まる、いわば関数になっているということだ。

よって、斜辺を r 、高さを y 、底辺の長さを x 、図の位置の角度 θ とする。このとき、 $\sin \theta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ と表す。大切なのは θ と 90° を図の位置に置くこと。(読み方はサイン、コサイン、タンジェント)



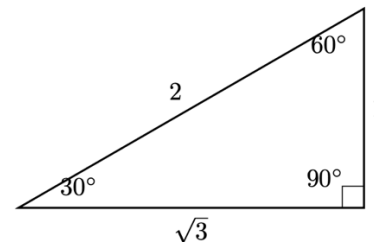
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

また、 $\sin \theta$ を 正弦、 $\cos \theta$ を 余弦、 $\tan \theta$ を 正接 とも呼ぶ。

2. 有名な角度の値

例えば、 $\sin 30^\circ$ っていくつだろう。斜辺の長さを 2 とすると、他の辺も比で求められる。先の例をもとに当ては

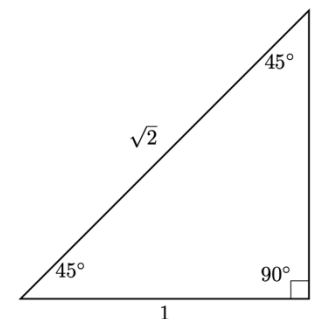
めると $\sin 30^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ 、 $\cos 30^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、



$\tan 30^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となるわけだ。

では、 $\sin 45^\circ$ だったら？同じように考えていこう。 $\sin 45^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、

$\cos 45^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\tan 45^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$ と



なるわけだ。

同じように $\theta = 60^\circ$ の場合も求めることができる。大切なのは、「覚えよう覚えよう！！」と気合を入れて覚えるのではなく、今後たくさん問題を解く中で、勝手に覚えてしまっていて欲しい。体が勝手に反応してくれる。

ついに $\sin \cos \tan$ が出てきたね！！

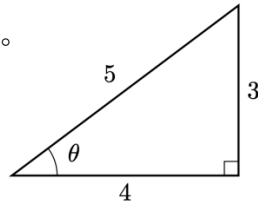
大丈夫。一緒に理解していこう～！！



◇問題

1. 右の図の直角三角形において、次の値を求めよ。

(1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ (3) $\tan \theta$



2. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 60^\circ$ (2) $\cos 60^\circ$ (3) $\tan 60^\circ$

3. 次の表を完成させよ。

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$			
$\cos \theta$			
$\tan \theta$			

数学 I 第 4 章 図形と計量 No.2

学習のねらい

三角比の拡張について理解しよう！

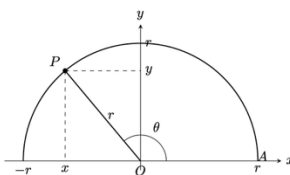
三角比の変換について理解しよう！

三角比の基本公式を理解して覚えよう！

1. 三角比の拡張

三角比を No.1 で定義した。しかし、問題点がある。150°などのように90°を超える角度の三角比が定義できない。なので、座標平面を用いて改めて定義し直そう。数学 I では0°以上180°以下の角までを扱う。

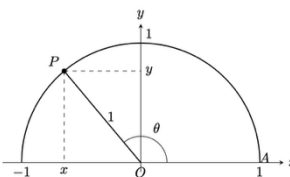
θ を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の与えられた角とする。座標平面上に、右の図のように、原点 O を中心とする半径 r の半円をかき、 $A(r, 0)$ とする。半円周上に $\angle AOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ をとる。このとき、 $\sin \theta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ と定義する。



しかし、これでもまだ面倒くさいと思ってしまう。 $\frac{y}{r}$ とかが分数だから・・・。なので、 $r = 1$ としてみよう。

まず、このような半径の大きさが1の円のことを単位円という。

先ほどと同じようにして、 $\sin \theta = y$ 、 $\cos \theta = x$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ となる。これをまとめる。



単位円周上の x 座標が $\cos \theta$ 、 y 座標が $\sin \theta$ 、傾きが $\tan \theta$ である。

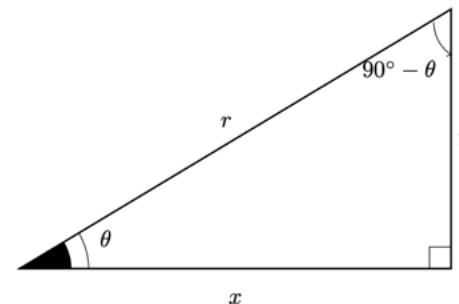
2. 三角比の変換

$90^\circ - \theta$ や $180^\circ - \theta$ の三角比を求める場面がある。公式を覚える必要はない。仕組みを理解して、その場で導出できるようにしよう。よって、

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

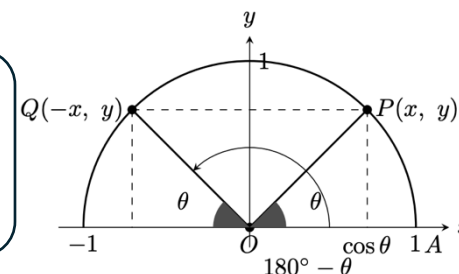
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan \theta}$$



$$\sin(180^\circ - \theta) = y = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \text{OQ の傾き} = -\tan \theta$$



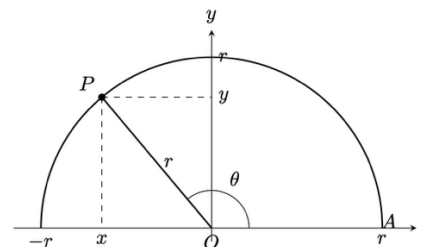
3. 三角比の基本公式

下の図のような半円において、 $P(x, y)$ をとると、以下を導出できる。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



◇問題

1. 単位円を用いて、以下の表を完成させよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$									
$\cos \theta$									
$\tan \theta$									

2. (1)は $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とし、(2)は $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(1) $\tan \theta = 3$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

3. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3) $\sin \theta - \cos \theta$ (4) $\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}$

数学 I 第 4 章 図形と計量 No.3

学習のねらい

三角比が絡んだ方程式・不等式を解けるようになろう！

1. 三角比の方程式

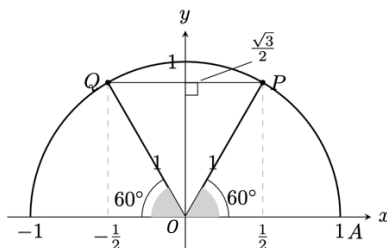
三角比には慣れてきたかな？今回は、逆の計算をしてみよう。「角度→三角比」ではなく、「三角比→角度」ということ。

例) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 θ の値を求めよ。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

右の図のように、単位円周上で y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は P と Q の 2 箇所である。

半径は 1 なので、斜辺の長さは 1。そして、高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、有名な $1:2:\sqrt{3}$ の三角形である。求める角度は、 $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ であるから、 $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

大切なのは、単位円を書くこと。慣れてくると、書かなくてもできるようになるが、初めのうちは単位円を書いて問題を解けるようにしよう！



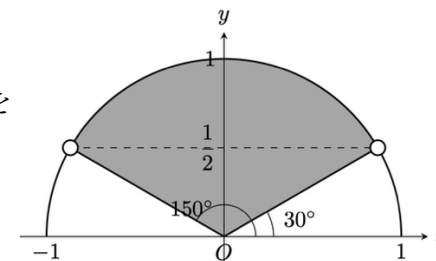
2. 三角比の不等式

例) $\sin \theta > \frac{1}{2}$ のとき、 θ の値の範囲を求めよ。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

これも単位円を使うと簡単に解ける。

右の図を見れば分かる通り、 y 座標が $\frac{1}{2}$ を超える角度は、 $30^\circ < \theta < 150^\circ$ である。

よって、答えは、 $30^\circ < \theta < 150^\circ$



何も難しいことはしていない。単位円を書いて、それを超える角度は幾つだろう？と考えるだけである。ぜひ◇問題で慣れて欲しい。

Topic—三角比と GPS

三角比も実は日常でたくさん使われている。例えば、GPS で現在地を特定する機能(イメージは iPhone の探す機能)。どうやって現在地を特定していると思う？実は、ここに三角比が絡んでくる。

GPS では、人工衛星から送られてくる信号をもとに、「衛星からどれくらい離れているか」を計算している。そして、複数の衛星から得られた情報を組み合わせることで、現在地を求めている。

位置や距離、方向を考える場面では、三角形や角度の考え方が使われる。三角比は、そうした技術を理解するための土台になる数学なのだ。

◇問題

1. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

$$(1) \sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3) \tan \theta < \sqrt{3}$$

数学 I 第 4 章 図形と計量 No.4

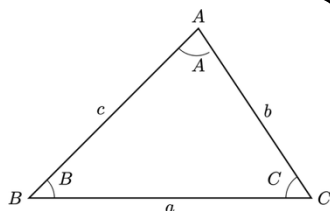
学習のねらい

正弦定理と余弦定理を理解して扱えるようになろう！

1. 正弦定理

まずは、以下の約束事を知ろう。

△ABC において、頂点 A、B、C に向かい合う辺 BC、CA、AB の長さをそれぞれ a 、 b 、 c で表し、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の大きさをそれぞれ、 A 、 B 、 C で表す。



また、三角形の 3 つの頂点を通る円を、その三角形の外接円という。三角形について、次の正弦定理が成り立つ。

△ABC の外接円の半径を R とすると以下の式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

証明は◇問題で扱う。「証明めんどいなあ・・・」と思う人もいると思うのだけれど、もちろんまず大事なことは公式を覚えること。ただ、数学を強くするためには 1 度は証明を見てみて欲しい。正弦定理を自由自在に扱えるようになったら証明もできるようになって欲しい。

2. 余弦定理

三角形の公式 2 つ目！！三角形について、次の余弦定理が成り立つ。

△ABC において、以下の式が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

これはつまり、角度と 2 辺が分かればその角度の対辺の長さが分かるというもの。もう一つの見方もある、3 つの辺の長さが分かれば、角度(正確には $\cos$ の値)が求まる。

△ABC において、以下の式が成り立つ。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\cos$ の値が求まるということは、 $\sin$ も $\tan$ も求まるということだ。正弦定理と同じく証明は◇問題で扱う。

正弦定理と余弦定理は、公式を覚えて、確実に扱えるようになって欲しい。

◇問題

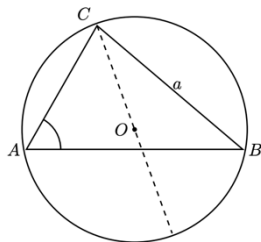
1. $\triangle ABC$ において、 $a = 10$ 、 $B = 60^\circ$ 、 $C = 75^\circ$ のとき、 b を求めよ。

2. $\triangle ABC$ において、 $a = 6$ 、 $A = 30^\circ$ のとき外接円の半径 R を求めよ。

3. 右の図の $\triangle ABC$ と、半径 R 外接円 O を用いて、

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つことを示せ。



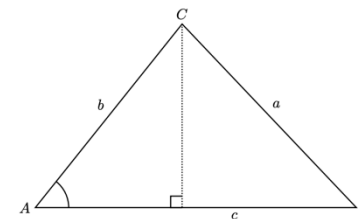
4. $\triangle ABC$ において、 $b = 2$ 、 $c = 3$ 、 $A = 60^\circ$ のとき、 a を求めよ。

5. $\triangle ABC$ において、 $a = 5$ 、 $b = 3$ 、 $c = 7$ のとき、 C を求めよ。

6. 右の図の $\triangle ABC$ を用いて、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

が成り立つことを示せ。



数学 I 第 4 章 図形と計量 No.5

学習のねらい

三角形の面積公式を理解しよう！
有名な三角形を知ろう！

1. 三角形の面積

正弦定理、余弦定理とこの公式がセットで教えられる。頑張って覚えよう！

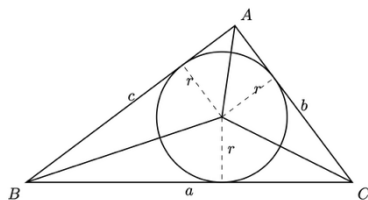
△ABC の面積を S とすると以下の式が得られる。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

また、三角形の 3 辺に接する円をその三角形の **内接円** という。

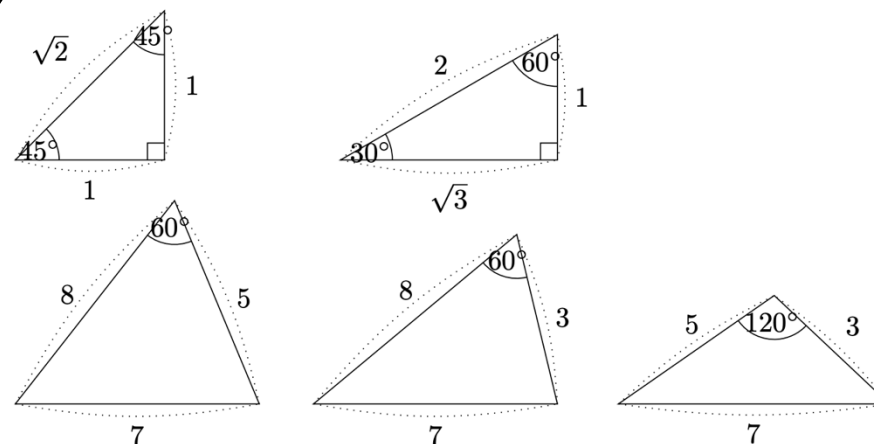
△ABC の面積を S 、内接円の半径を r とすると、次の等式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$



これらの式はよく使うので、ぜひ覚えておこう！

2. 有名な三角形



ポイントは、下の 3 つの三角形で、7 の対角が全て有名角であること。つまり例えば、「7-5-8 三角形の面積を求めよ」という問題が出た時に 60° を知らなかったら、余弦定理を用いて $\cos$ を出し、関係式から、 $\sin$ を出し、面積公式を使う、となるわけだ。かなりめんどい。

そこで、 60° を知っていれば、一気に面積公式を使えるわけだ。

これにて、第 4 章終わり！！お疲れ！！

あと 1 章で数学 I が終わるよ！！



◇問題

1. 次のような $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1) $a = 3$ 、 $c = 2\sqrt{2}$ 、 $B = 45^\circ$ (2) $a = 6$ 、 $b = 5$ 、 $c = 4$

2. $\triangle ABC$ において、 $a = 2$ 、 $b = \sqrt{2}$ 、 $c = 1$ とする。次のものを求めよ。

(1) $\cos B$ 、 $\sin B$ (2) $\triangle ABC$ の面積 S

(3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r (4) $\triangle ABC$ の外接円の半径 R

3. $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$ 、 $AC = 3$ 、 $BC = 7$ とし、 $\angle A$ の2等分線と辺 BC の交点を D とする。このとき、 AD の長さを求めよ。