

数学Ⅱ 第Ⅰ章 式と証明 No.Ⅰ

学習のねらい

パスカルの三角形、二項定理について理解しよう！

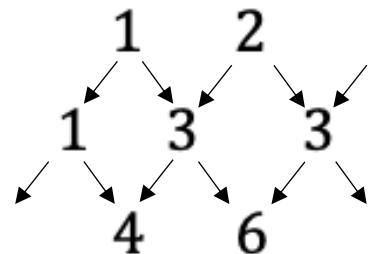
1. パスカルの三角形

数学Ⅰで $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ということを確認した。(数学Ⅰ第1章 No.2)

では、 $(a+b)^4$ はどうなるだろう。計算すると、 $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ となる。こうして見ると、実はとあることが分かる。例えば、文字の次数について。 a は4、3、2、1、0と減っていき、 b は0、1、2、3、4と増えている。

また、係数についても取り出してみると面白いことがわかる。それがパスカルの三角形だ！

$(a+b)^1$			1	1		
$(a+b)^2$			1	2	1	
$(a+b)^3$			1	3	3	1
$(a+b)^4$		1	4	6	4	1
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1



左の枠がパスカルの三角形で、右がその一部。2つの数字の和が2つの矢印の先の数字となる。これで何乗されても怖くない！！

2. 二項定理

でもさあ、 $(a+b)^{10}$ とかだるいよね。そこでちょっと考えてみよう。

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = ? a^3 b^2$$

このように、 a を3個、 b を2個選んだら a^3b^2 という項が出来上がる。つまり、 a を3個、 b を2個選んだときの組み合わせの数が a^3b^2 の係数となるわけだ！！つまり、「5個あるうち、 a を3個選ぶ」を考える。 ${}_5C_3$ だね！ということで、 ${}_5C_3 = 10$ となり確かにパスカルの三角形通り。以上より、 $(a+b)^n$ の展開式は、次のようになる。この展開を二項定理といい、 $a^{n-k}b^k$ の係数 ${}_nC_k$ を二項係数という。(これは覚えなくて大丈夫！毎回その場で仕組みを思い出して計算すれば良い！)

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_k a^{n-k} b^k + \dots + {}_nC_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_nC_n a^0 b^n$$

3. 多項定理

では、 $(a+b+c)^n$ ならどうでしょうか。これはつまり、 n 個()があって、その中から、 p 個 a を、 q 個 b を、 r 個 c を選ぶということだ。「同じものを含む順列」だね！つまり以下が言える。

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ ($p+q+r=n$)の項の係数は、

$$\frac{n!}{p! q! r!}$$

◇問題

1. 次の式の展開式における、[]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x + 1)^5$ $[x^4]$ (2) $(2 - x)^{10}$ $[x^7]$ (3) $(2x - 3y)^7$ $[x^5y^2]$

2. 次の式の展開式における、[]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x + y + z)^6$ $[x^2yz^3]$ (2) $(2x - 3y + z)^7$ $[x^2y^2x^3]$

3. 次の式の展開式における、[]内に指定された項の係数を求めよ。

$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ $[x^3]$

4. 11^{11} を100で割ったときの余りを二項定理を用いて求めよ。

数学Ⅱ 第Ⅰ章 式と証明 No.2

学習のねらい

多項式の割り算について理解しよう！

整数の割り算は $a = bq + r$ と表すと学んだ。これを多項式に応用してみよう。例えば、

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2 + 2x - 1)(x - 3) + 6x - 5$$

という式が成り立っている。 $A = x^3 - x^2 - x - 2$ 、 $B = x^2 + 2x - 1$

1、 $Q = x - 3$ 、 $R = 6x - 5$ とすると、 $A = BQ + R$ が成り立つ。つまり、 $x^3 - x^2 - x - 2 (= A)$ を $x^2 + 2x - 1 (= B)$ で割ったときの商が $x - 3 (= Q)$ 、余りが $6x - 5 (= R)$ と考えられる。

一般に次のことが成り立つ。

A と B が同じ1つの文字についての多項式で、 $B \neq 0$ とすると、

$A = BQ + R$ 、 R は0か、 B より次数の低い多項式を満たす多項式 Q と R がただ1通りに定まる。

と言っても大事なのは、計算できることであって……。どのように計算しようか。次の□のように計算する。

Step.1

A と B を降べきの順にする。

Step.2

次数を揃えて計算する。ある次数の項がないときは、その項の場所をあけて計算する。

Step.3

余りが0になるか、余りの次数が、割る式 B の次数よりも低くなるまで計算する。

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ x^2 + 2x - 1 \overline{) x^3 - x^2 - x - 2} \\ \underline{x^3 + 2x^2 - x} \\ -3x^2 - 2 \\ \underline{-3x^2 - 6x + 3} \\ 6x - 5 \end{array}$$

まあ、「と言われましても……」となると思うので、実際に手を動かして慣れましょう！！

数学Ⅱが始まったね！

数学Ⅱ……やっぱり難しいので

頑張っていきましょう！

私も頑張るね！



◇問題

1. 次の多項式 A 、 B について、 A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = x^2 + 7x + 10$ 、 $B = x + 2$

(2) $A = x^3 - 3x - 8$ 、 $B = x - 3$

(3) $A = x^2 - 3x - 5$ 、 $B = 2x - 2$

数学Ⅱ 第Ⅰ章 式と証明 No.3

学習のねらい

分数式の計算をできるようになろう！

A を整式、 B を定数でない整式とすると、 $\frac{A}{B}$ の形で表される式を分数

式という。例えば、 $\frac{4b^2}{3ac}$ 、 $\frac{x^2-x+1}{x-2}$ は分数式である。

分数式は分母と分子にある共通因数で割ることで、分数のように約分することができる。

例) $\frac{8a^2x^3y}{40axy^2} = \frac{ax^2}{5y}$ 、 $\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ である。

$\frac{ax^2}{5y}$ 、 $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ のように、それ以上約分できない分数式を既約分数式と

いう。また、分数式の四則演算は分数と同様に行う。

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

では、分母や分子にさらに分数式がある場合どうでしょうか。このような分数式を繁分数式という。

例) $\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ を簡単にせよ。

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x} \div \frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x} \times \frac{x}{x+1} = x-1$$

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right) \times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

上の式のように、2パターンの解き方がある。これをまとめると以下のようになる。

分数を大きく見て、割り算の形にする。

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$$

分母と分子に BD をかける。

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{\frac{A}{B} \times BD}{\frac{C}{D} \times BD} = \frac{AD}{BC}$$

◇問題

1. 次の分数式を約分して簡単にせよ。

$$(1) \frac{15a^2b^2}{40a^3b} \quad (2) \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$$

2. 次の計算をせよ。

$$(1) \frac{a^2b^3}{3c} \times \frac{6c^2}{a^2b} \quad (2) \frac{x+1}{x^2-4} \times \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$$

3. 次の計算をせよ。

$$(1) \frac{x^2+4}{x-2} - \frac{4x}{x-2} \quad (2) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \quad (3) \frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2-x-2}$$

4. 次の式を簡単にせよ。

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$$

数学Ⅱ 第Ⅰ章 式と証明 No.4

学習のねらい

恒等式について理解しよう！

例えば、 $x+1=2$ は $x=-1$ でしか成り立たない式である。一方、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

は、注目する文字にどのような値を代入しても、その等式の両辺の値が存在する限り、常に成り立つ等式を、その文字についての**恒等式**という。一般に、式の変形によって、導かれる等式(例えば、展開・因数分解の公式など)は、恒等式である。同類項を整理した多項式について、次のことが成り立つ。

P 、 Q を x についての多項式とする。

$P=Q$ が恒等式 $\Leftrightarrow P$ と Q の次数は等しく、両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しい。

$P=0$ が恒等式 $\Leftrightarrow P$ の各項の係数はすべて0

と言っても分からないと思うので、例題を見ながら確認していこう。

例) 次の等式が x についての恒等式となるように定数 a 、 b 、 c の値を定めよ。

$$x^2 - x = a(x-3)^2 + b(x-3) + c$$

等式の右辺を x について整理すると、

$$x^2 - x = ax^2 + (-6a+b)x + (9a-3b+c)$$

となる。この等式が x についての恒等式になるには、両辺の同じ次数の項の係数が等しくなるときなので、

$$\begin{cases} a = 1 \\ -6a + b = -1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

となる。

このように、各項の係数が等しいことを利用して、恒等式に関する未知の係数を求める解き方を**係数比較法**という。もう1つの解き方もある。

$x^2 - x = a(x-3)^2 + b(x-3) + c$ の x にはどのような値を代入しても成り立つので、 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $x=3$ を代入すると、

$$\begin{cases} 0 = 9a - 3b + c \\ 0 = 4a - 2b + c \\ 6 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

となる。

これを右辺に代入すると、 $1 \times (x-3)^2 + 5(x-3) + 6 = x^2 - x$ となり、左辺と一致する。よって、 $a=1$ 、 $b=5$ 、 $c=6$ である。

ポイントは、左辺や右辺で0を多く作る値を代入することだ。このように、いくつかの値を代入して、 a 、 b 、 c に関する式を作る方法を、**数値代入法**という。また、あくまでも $x=0$ 、 $x=1$ 、 $x=3$ で成り立つことしか確認していないので、求めた値を元の式に代入し、恒等式となることを確認する。

◇問題

1. 次の等式が x についての恒等式であるとき、定数 a 、 b 、 c の値を係数比較法と数値代入法の2パターンで求めよ。

$$x^2 - x = a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c$$

2. 等式 $\frac{3x-5}{(2x-1)(x+3)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3}$ が x についての恒等式になるように、定数 a 、 b の値を定めよ。

数学Ⅱ 第Ⅰ章 式と証明 No.5

学習のねらい

等式・不等式の証明方法を理解しよう！

1. 等式の証明

等式を証明するときは、以下の方針がよく用いられる。

- ① A か B の一方を変形して、他方を導く。
- ② $A = C$ 、 $B = C$ を示す。
- ③ $A - B = 0$ を示す。

2. 比例式

$a : b = c : d$ や $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のように、比や比の値が等しいことを表す等式を**比例式**という。

また、 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ を $a : b : c = x : y : z$ と表す。この $a : b : c$ を a 、 b 、 c の**連比**という。

$a : b : c = x : y : z$ のとき、 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ が成り立つので、これを k とおくことにより $a = xk$ 、 $b = yk$ 、 $c = zk$ と表される。

3. 不等式の証明

不等式を証明するときは、以下の方針がよく用いられる。

- ① $A - B > 0$ を示す。
- ② $A > C$ 、 $C > B$ を示す。

4. 相加相乗平均

2つの実数 a 、 b について、 $\frac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**、 $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、 $\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という。
この2つの平均には、次のような関係がある。

$a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{等号は、} a = b \text{のときに成り立つ})$$

証明

$a > 0$ 、 $b > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ すなわち $a = b$ のときである。

◇問題

1. 次に等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

2. $a : b : c = 1 : 2 : 3$ 、 $a + b + c = 24$ のとき、 a 、 b 、 c の値を求めよ。

3. 不等式 $a^2 + 4 \geq 4a$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立するときの a の値を求めよ。

4. $x > 0$ のとき、 $x + \frac{4}{x}$ の最小値を求めよ。