数学Ⅱ　第１章　式と証明　No.１

学習のねらい

パスカルの三角形、二項定理について理解しよう！

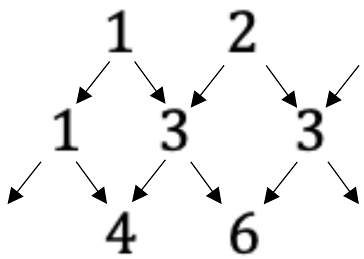
１.パスカルの三角形

　数学Ⅰで$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ということを確認した。（数学Ⅰ第１章 No.2）

　では、$(a+b)^4$はどうなるだろう。計算すると、$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$となる。こうして見ると、実はとあることが分かる。例えば、文字の次数について。aは4、3、2、1、0と減っていきbは0、1、2、3、4と増えている。

　また、係数についても取り出してみると面白いことがわかる。それがパスカルの三角形だ！

$(a+b)^1$	1　1
$(a+b)^2$	1　2　1
$(a+b)^3$	1　3　3　1
$(a+b)^4$	1　4　6　4　1
$(a+b)^5$	1　5　10　10　5　1



　左の枠がパスカルの三角形で、右がその一部。２つの数字の和が２つの矢印の先の数字となる。これで何乗されても怖くない！！

2.二項定理

　でもさぁ、$(a+b)^{10}$とかだるいよね。そこでちょっと考えてみよう。

$$(a+b)^5=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\quad=\ ?\,a^3b^2$$

　このように、aを3個、bを2個選んだらa^3b^2という項が出来上がる。つまり、aを3個、bを2個選んだときの組み合わせの数がa^3b^2の係数となるわけだ！！つまり、「5個あるうち、aを3個選ぶ」を考える。${}_5C_3$だよね！ということで、${}_5C_3=10$となり確かにパスカルの三角形通り。以上より、$(a+b)^n$の展開式は、次のようになる。この展開を二項定理と言い、$a^{n-k}b^k$の係数${}_nC_k$を二項係数という。（これは覚えないで大丈夫！毎回その場で仕組みを思い出して計算すれば良い！）

$$(a+b)^n={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+{}_nC_ka^{n-k}b^k+\cdots+{}_nC_{n-1}a^1b^{n-1}+{}_nC_na^0b^n$$

3.多項定理

　では、$(a+b+c)^n$ならどうしようか。これはつまり、n個(　)があって、その中から、p個aを、q個bを、r個cを選ぶということだ。「同じものを含む順列」だね！つまり以下が言える。

$(a+b+c)^n$の展開式における$a^pb^qc^r\,(p+q+r=n)$の項の係数は、

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

◊問題

1.　次の式の展開式における、[　]内に指定された項の係数を求めよ。

（1）$(3x+1)^5$　$[x^4]$　（2）$(2-x)^{10}$　$[x^7]$　（3）$(2x-3y)^7$　$[x^5y^2]$

2.　次の式の展開式における、[　]内に指定された項の係数を求めよ。

（1）$(x+y+z)^6$　$[x^2yz^3]$　（2）$(2x-3y+z)^7$　$[x^2y^2x^3]$

3.　次の式の展開式における、[　]内に指定された項の係数を求めよ。

$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^6$　$[x^3]$

4.　11^{11}を100で割ったときの余りを二項定理を用いて求めよ。