

数学Ⅱ 第Ⅰ章 式と証明 No.4

学習のねらい

恒等式について理解しよう！

例えば、 $x+1=2$ は $x=-1$ でしか成り立たない式である。一方、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

は、注目する文字にどのような値を代入しても、その等式の両辺の値が存在する限り、常に成り立つ等式を、その文字についての**恒等式**という。一般に、式の変形によって、導かれる等式(例えば、展開・因数分解の公式など)は、恒等式である。同類項を整理した多項式について、次のことが成り立つ。

P 、 Q を x についての多項式とする。

$P=Q$ が恒等式 $\Leftrightarrow P$ と Q の次数は等しく、両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しい。

$P=0$ が恒等式 $\Leftrightarrow P$ の各項の係数はすべて0

と言っても分からないと思うので、例題を見ながら確認していこう。

例) 次の等式が x についての恒等式となるように定数 a 、 b 、 c の値を定めよ。

$$x^2 - x = a(x-3)^2 + b(x-3) + c$$

等式の右辺を x について整理すると、

$$x^2 - x = ax^2 + (-6a+b)x + (9a-3b+c)$$

となる。この等式が x についての恒等式になるには、両辺の同じ次数の項の係数が等しくなるときなので、

$$\begin{cases} a = 1 \\ -6a + b = -1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

となる。

このように、各項の係数が等しいことを利用して、恒等式に関する未知の係数を求める解き方を**係数比較法**という。もう1つの解き方もある。

$x^2 - x = a(x-3)^2 + b(x-3) + c$ の x にはどのような値を代入しても成り立つので、 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $x=3$ を代入すると、

$$\begin{cases} 0 = 9a - 3b + c \\ 0 = 4a - 2b + c \\ 6 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

となる。

これを右辺に代入すると、 $1 \times (x-3)^2 + 5(x-3) + 6 = x^2 - x$ となり、左辺と一致する。よって、 $a=1$ 、 $b=5$ 、 $c=6$ である。

ポイントは、左辺や右辺で0を多く作る値を代入することだ。このように、いくつかの値を代入して、 a 、 b 、 c に関する式を作る方法を、**数値代入法**という。また、あくまでも $x=0$ 、 $x=1$ 、 $x=3$ で成り立つことしか確認していないので、求めた値を元の式に代入し、恒等式となることを確認する。

◇問題

1. 次の等式が x についての恒等式であるとき、定数 a 、 b 、 c の値を係数比較法と数値代入法の2パターンで求めよ。

$$x^2 - x = a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c$$

2. 等式 $\frac{3x-5}{(2x-1)(x+3)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3}$ が x についての恒等式になるように、定数 a 、 b の値を定めよ。