数学Ⅱ　第１章　式と証明　No.5

学習のねらい

等式・不等式の証明方法を理解しよう！

1. 等式の証明

等式を証明するときは、以下の方針がよく用いられる。

①AかBの一方を変形して、他方を導く。
②$A=C$、$B=C$を示す。
③$A-B=0$を示す。

2. 比例式

$a:b=c:d$や$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$のように、比や比の値が等しいことを表す等式を比例式という。

また、$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$を$a:b:c=x:y:z$と表す。この$a:b:c$を$a$、$b$、$c$の連比という。

$a:b:c=x:y:z$のとき、$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$が成り立つので、これを$k$とおくことにより$a=xk$、$b=yk$、$c=zk$と表される。

3. 不等式の証明

不等式を証明するときは、以下の方針がよく用いられる。

①$A-B>0$を示す。
②$A>C$、$C>B$を示す。

4. 相加相乗平均

2つの実数a、bについて、$\frac{a+b}{2}$をaとbの相加平均、$a>0$、$b>0$のとき、$\sqrt{ab}$をaとbの相乗平均という。

この2つの平均には、次のような関係がある。

$a>0$、$b>0$のとき、

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad (\text{等号は、} a=b \text{のときに成り立つ})$$

証明

$a>0$、$b>0$であるから

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$$

ゆえに、$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$すなわち$a=b$のときである。

◊問題

1.　次に等式が成り立つことを証明せよ。

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

2.　$a:b:c=1:2:3$、$a+b+c=24$のとき、a、b、cの値を求めよ。

3.　不等式$a^2+4\geqq 4a$が成り立つことを証明せよ。また、等号が成立するときのaの値を求めよ。

4.　$x>0$のとき、$x+\frac{4}{x}$の最小値を求めよ。