

数学Ⅱ 第2章 複素数と方程式 No.1

学習のねらい

複素数について理解しよう！

1. 虚数単位

例えば、 $x^2 = 2$ の解は $x = \pm\sqrt{2}$ となる。では、 $x^2 = -2$ の場合どうなるだろうか。「いや、無理っしょ。」となるだろう。もちろん今まで習ってきた数に2乗して-2になる数は存在しない。そこで新しい概念を作ってしまったのだ！！

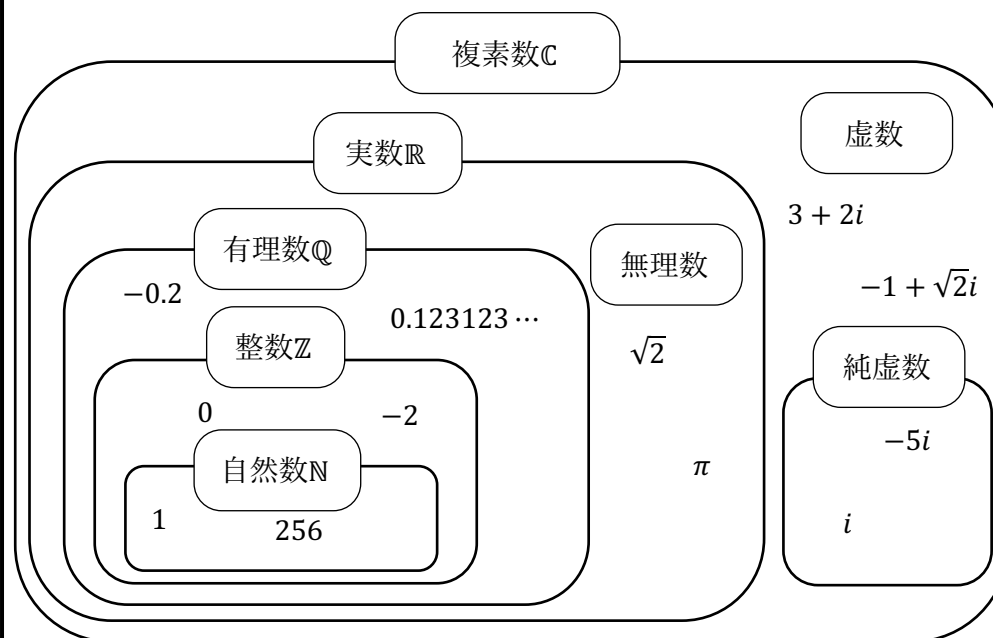
2乗すると、-1になる新しい数を1つ考えて、これを文字*i*で表し、虚数単位という。つまり、 $i^2 = -1$ である。

これにより、 $x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - (-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}i$ となる。

2. 複素数

$3 + 2i$ のように、2つの実数*a*、*b*を用いて、 $a + bi$ の形に表される数を複素数という。複素数 $a + bi$ の*a*を実部、*b*を虚部という。

$b = 0$ のとき、 $a + bi = a$ となるので、これは実数となる。 $b \neq 0$ のとき、 $a + bi$ には必ず虚数単位*i*があるので、これを虚数という。 $a = 0$ 、 $b \neq 0$ のときには、 $a + bi = bi$ となるのでこれを純虚数という。



図にまとめると上のようになる。(実数も複素数の一部。)

3. 複素数の相等と複素数の加法・減法・乗法

2つの複素数が等しいとき、実部も虚部も等しくなる。

a、*b*、*c*、*d*を実数とすると、

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ かつ } b = d$$

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

複素数の加法、減法は*i*を文字のように扱って、実部と虚部のそれぞれの和と差を計算する。ただし乗法において、 i^2 が出てきたら-1にする。

◇問題

1. 次の等式を満たす実数 x 、 y の値を求めよ。

(1) $(x + 3) + (x - y)i = 0$ (2) $(3x - y) + (2x + 3y)i = 9 - 5i$

2. 次の計算をせよ。

(1) $(7 + 3i) + (3 - 4i)$ (2) $(5 - i) - (3 + 2i)$

(3) $(2 + 3i)(3 - 2i)$ (4) i^3

数学Ⅱ 第2章 複素数と方程式 No.2

学習のねらい

共役な複素数について理解しよう！

虚数解を理解しよう！

1. 共役な複素数

a, b を実数とする。複素数 $a + bi$ と $a - bi$ を、互いに共役(きょうやく)な複素数という。複素数 α の共役な複素数を $\bar{\alpha}$ と表す。つまり、

$a + bi = a - bi$ (虚部の符号を変える) となる。 $\alpha\bar{\alpha}$ は、

$$\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

となるので、共役な複素数どうしの積は必ず実数となる。これを利用して

て、 $\frac{3+i}{1+2i}$ の分母の実数化(分母の i を無くす)ことを考えよう。 $\frac{3+i}{1+2i} =$

$$\frac{3+i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i+i-2i^2}{1^2+2^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i \text{ となる。分母の複素数の共役な複素}$$

数を掛けることで、分母から i を消去することができる。

2. 負の数の平方根

複素数の範囲では、負の数の平方根が考えられる。一般に、 $a > 0$ のとき、負の数 $-a$ の平方根は、 $\pm\sqrt{a}i$ となる。 $\sqrt{-a}$ を次のように定める。

$$a > 0 \text{ のとき、} -a \text{ の平方根は、} \pm\sqrt{-a} \text{ すなわち } \pm\sqrt{a}i$$

3. 虚数解と判別式

今後、特に断りがない場合は、方程式の係数は全て実数とし、方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であった。この

$b^2 - 4ac$ という部分が「正」なのか「0」なのか「負」なのかで解を持つかどうかを判別することができた。しかし、 i というものを導入したことで、 $b^2 - 4ac < 0$ でも、複素数の範囲では、解を持つということになる。例えば、 $x^2 + 2x + 3 = 0$ の解は $x = -1 \pm \sqrt{2}i$ となる。

方程式の解のうち、実数であるものを実数解といい、虚数であるものを虚数解という。

したがって、判別式の扱い方も次のようになる。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解と、その判別式 D について、次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} D > 0 &\Leftrightarrow \text{異なる2つの実数解を持つ} \\ D = 0 &\Leftrightarrow \text{重解を持つ} \\ D < 0 &\Leftrightarrow \text{異なる2つの虚数解を持つ} \end{aligned}$$

2次方程式の異なる2つの虚数解は共役な複素数となる。

実は i って楽しいんだよね！！

複素数平面ってのがあって、

そこでも大活躍だから楽しみに！



◇問題

1. 2乗すると i となる複素数 z を求めよ。

2. $x = -1 + \sqrt{2}i$ のとき、

(1) $x^2 + 2x + 3 = 0$ であることを示せ。

(2) $x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 31x + 22$ の値を求めよ。

3. 次の2次方程式を解け。

(1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $2x^2 + 5x + 4 = 0$

4. 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。ただし、 k は定数とする。

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $2x^2 - (k + 2)x + k - 1 = 0$

数学Ⅱ 第2章 複素数と方程式 No.3

学習のねらい

解と係数の関係について理解しよう！
対称式との関係について理解しよう！

1. 解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が $x = \alpha, \beta$ だとしよう。そのとき、式は次のように考えられる。

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

これを展開すると、

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta = 0$$

となる。この式は元の式と同じ2次方程式なので、係数を比較すると、

$$b = -a(\alpha + \beta) \quad c = a\alpha\beta$$

となる。これより、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

となる。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

である。

2. 対称式との関係

数学Ⅰで学習したが改めて確認しよう。(数学Ⅰ第1章 No.7 より)

文字を入れ替えても全く同じ式になる式のことを対称式という。

2変数の対称式の場合、 $x + y, xy$ のことを基本対称式という。なお、すべての対称式は、基本対称式を使って表すことができる。

例) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

つまり、 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$ が求まっているから、 $\alpha^2 + \beta^2$ とかの値が求まるよねということ。解が複素数の範囲でも使用できる。

例) $x^2 + 2x + 3 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$ となるので、

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2$$

となる。

◇問題

1. 和が3、積が3である2数を求めよ。

2. 2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の2つの解を α 、 β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ (2) $\alpha^2 + \beta^2$ (3) $\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}$

数学Ⅱ 第2章 複素数と方程式 No.4

学習のねらい

剰余定理と因数定理を理解しよう！

1. 剰余定理

例) 多項式 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ を $x + 1$ で割ったときの余りを求めよ。

「よしじゃあ、筆算か〜〜」と思うかもしれない。しかし僕らが今、求めたいのは余り！！商には興味がないわけだ。では、どうしようか。例えば、 $x^3 - 2x^2 + 5$ を $x + 1$ で割ったときの商を Q 、余りを R としてみよう。すると、

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5 = (x + 1)Q + R$$

となる。ここで x に -1 を代入、つまり $P(-1)$ を考えてみよう。すると、

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 5 = \{(-1) + 1\}Q + R$$

となる。 $(-1)^3 - 2(-1)^2 + 5 = 2$ である。一方、 $\{(-1) + 1\}Q + R = 0 \cdot Q + R = R$ となる。つまり、

$$R = 2$$

と求まるわけだ。

このように、多項式 $P(x)$ を1次式 $x - k$ で割った時の商を $Q(x)$ 、余りを R とすると、 $P(x) = (x - k)Q(x) + R$ (R は定数)が成り立つので、この等式の両辺の x に k を代入すると、 $P(k) = R$ が得られる。これを剰余定理という。 $P(x) = (ax + b)Q(x) + R$ なら、 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ で余りが求まる。

2. 因数定理

例) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ を因数分解せよ。

「えっ・・・うーん、無理では？」と思うかもしれない。しかし、我々は剰余定理を知っている。これを応用しよう！例えば、 $x = -1$ を代入してみよう。すると、 $(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = 0$ となる。つまり、 $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)Q(x)$ となっているよね？もう少し硬い言い方をすると、 $x^3 - 4x^2 + x + 6$ は $x + 1$ を因数に持っているということだ！これを用いて計算することで、

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

とできる！！

このように、 $P(x)$ を因数分解したいけど、その因数が分からない時には、 $P(\alpha) = 0$ となる α を見つけて計算するということだ！

まとめると、 $P(\alpha) = 0$ となるとき、 $x - \alpha$ は $P(x)$ の因数である。これを因数定理という。

3. 因数の見つけ方

と言っても、 $P(\alpha) = 0$ となる α をどうやって見つけんの！となるよね。実は、以下の方法で見つけられる！

n 次の多項式 $P(x)$ があって、 $P(\alpha) = 0$ となる α は、

$$\alpha = \pm \frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の文字の係数の約数}}$$

である。

◇問題

1. 多項式 $2x^3 - x^2 + 5$ を、次の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1) $2x + 3$ (2) $3x - 1$

2. 多項式 $P(x) = x^3 + ax + 2$ を $x - 2$ で割ったときの余りが4になるように、定数 a の値を定めよ。

3. 次の式を、因数定理を用いて有理数の範囲で因数分解せよ。

(1) $2x^3 - 5x^2 - x + 1$ (2) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

数学Ⅱ 第2章 複素数と方程式 No.5

学習のねらい

高次方程式について理解しよう！

3乗根について理解しよう！

1. 高次方程式

「2次方程式があるのなら、3次方程式だってあるのでは？」と思う人もいるでしょう。もちろん！ある！

一般的に、3次以上の方程式を高次方程式と言い、ここでは実数を係数とする高次方程式について考える。

「解の公式を使って解くのか？」と思うかもしれないが、解の公式はあるにはあるけれど、超長いので、手計算で使うのは現実的ではない。そのため、高校数学では因数定理や因数分解を用いて解くことが多い。

例) $x^3 = -8$ を解け。

え！ $x = -2$ じゃん！と思うかもしれない。本当にそうだろうか？
 $x^3 = -8 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$ となるので、解は $x = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$ である。

つまり、必要に応じて因数定理を用いて因数分解をして、高次方程式を解いていくということだ。一般的に、 n 次方程式は、複素数の範囲で常に n 個の解を持つ。(2重解は2個と数える。3重解等も同様。)

2.3 乗根

2乗して a になる数を a の平方根といった。同じように3乗して a になる数、つまり $x^3 = a$ の解を、 a の3乗根という。とくに、1の3乗根、つまり $x^3 = 1$ の解は有名な性質があるので、見ていこう！

例) $x^3 = 1$ の解のうち、虚数であるものの1つを ω とするとき、 ω^2 を求めよ。

まず、 ω はオメガと読む。(・ ω ・)で見たことないかな？

$x^3 = 1$ を解くと、 $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ となるので、
 $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ となる。ここで $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。(－の方でも大丈夫！)

$\omega^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ となり、あら不思議これも $x^3 = 1$ の解になっている！

よって、以下が言える。

$x^3 = 1$ の虚数解の1つを ω とすると、

① $x^3 = 1$ の解は、1、 ω 、 ω^2

② $\omega^3 = 1$

③ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

この性質を用いた、問題があるので、◇問題で解いてみて欲しい！

◇問題

1. 次の方程式を解け。

(1) $x^3 = 27$ (2) $x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$

(3) $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$

2. 1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つを ω とするとき、次の値を求めよ。

(1) $\omega^7 + \omega^8$ (2) $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1$