数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式　No.2

学習のねらい

共役な複素数について理解しよう！
虚数解を理解しよう！

1. 共役な複素数

　a、bを実数とする。複素数$a+bi$と$a-bi$を、互いに**共役(きょうやく)な複素数**という。複素数αの共役な複素数を$\overline{\alpha}$と表す。つまり、$\overline{a+bi}=a-bi$（虚部の符号を変える）となる。$\alpha\overline{\alpha}$は、

$$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

となるので、共役な複素数どうしの積は必ず実数となる。これを利用して、$\frac{3+i}{1+2i}$の分母の実数化(分母のiを無くす)ことを考えよう。$\frac{3+i}{1+2i}=\frac{3+i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-6i+i-2i^2}{1^2+2^2}=\frac{5-5i}{5}=1-i$となる。分母の複素数の共役な複素数を掛けることで、分母からiを消去することができる。

2. 負の数の平方根

　複素数の範囲では、負の数の平方根が考えられる。一般に、$a>0$のとき、負の数$-a$の平方根は、$\pm\sqrt{a}i$となる。$\sqrt{-a}$を次のように定める。

> $a>0$のとき、$-a$の平方根は、$\pm\sqrt{-a}$　すなわち　$\pm\sqrt{a}i$

3. 虚数解と判別式

　今後、特に断りがない場合は、方程式の係数は全て実数とし、方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする。

　２次方程式$ax^2+bx+c=0$の解は、$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$であった。この$b^2-4ac$という部分が「正」なのか「0」なのか「負」なのかで解を持つかどうかを判別することができた。しかし、iというものを導入したことで、$b^2-4ac<0$でも、複素数の範囲では、解を持つということになる。例えば、$x^2+2x+3=0$の解は$x=-1\pm\sqrt{2}i$となる。

　方程式の解のうち、実数であるものを**実数解**といい、虚数であるものを**虚数解**という。

　したがって、判別式の扱い方も次のようになる。

> ２次方程式$ax^2+bx+c=0$の解と、その判別式Dについて、次のことが成り立つ。
>
> $D>0$　⇔　異なる２つの実数解を持つ
> $D=0$　⇔　重解を持つ
> $D<0$　⇔　異なる２つの虚数解を持つ

　２次方程式の異なる２つの虚数解は共役な複素数となる。

> 実はiって楽しいんだよね！！
>
> 複素数平面ってのがあるんだけど、
>
> そこでも大活躍だからお楽しみに！

◊問題

1.　2乗するとiとなる複素数zを求めよ。

2.　$x=-1+\sqrt{2}i$のとき、

（1）$x^2+2x+3=0$であることを示せ。

（2）$x^4+7x^3+20x^2+31x+22$の値を求めよ。

3.　次の2次方程式を解け。

（1）$3x^2+5x-2=0$　（2）$2x^2+5x+4=0$

4. 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。ただし、kは定数とする。

（1）$3x^2-5x+3=0$　（2）$2x^2-(k+2)x+k-1=0$