数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式　No.3

学習のねらい

解と係数の関係について理解しよう！
対称式との関係について理解しよう！

1. 解と係数の関係

２次方程式$ax^2+bx+c=0$の解が$x=\alpha$、βだとしよう。そのとき、式は次のように考えられる。

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

これを展開すると、

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Leftrightarrow ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$$

となる。この式は元の式と同じ２次方程式なので、係数を比較すると、

$$b=-a(\alpha+\beta) \qquad c=a\alpha\beta$$

となる。これより、

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

となる。

２次方程式$ax^2+bx+c=0$の２つの解をα、βとすると、

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

である。

2. 対称式との関係

数学Ⅰで学習したが改めて確認しよう。（数学Ⅰ第１章 No.7 より）

文字を入れ替えても全く同じ式になる式のことを**対称式**という。
2変数の対称式の場合、$x+y$、xyのことを**基本対称式**という。なお、すべての対称式は、基本対称式を使って表すことができる。

例） $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}=\frac{x+y}{xy}$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

つまり、$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$、$\alpha\beta=\frac{c}{a}$が求まっているから、$\alpha^2+\beta^2$とかの値が求まるよねということ。解が複素数の範囲でも使用できる。

例） $x^2+2x+3=0$の２つの解をα、βとするとき、$\alpha^2+\beta^2$の値を求めよ。

$\alpha+\beta=-2$、$\alpha\beta=3$となるので、

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=-2$$

となる。

◊問題

1.　和が 3、積が 3 である 2 数を求めよ。

2.　2 次方程式$x^2-2x+3=0$の 2 つの解をα、βとする。次の式の値を求めよ。

（1）$(\alpha+1)(\beta+1)$　（2）$\alpha^2+\beta^2$　（3）$\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}$