数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式　No.4

学習のねらい

剰余定理と因数定理を理解しよう！

1.剰余定理

例）多項式$P(x)=x^3-2x^2+5$を$x+1$で割ったときの余りを求めよ。

「よしじゃあ、筆算か〜〜」と思うかもしれない。しかし僕らが今、求めたいのは余り！！商には興味がないわけだ。では、どうしようか。例えば、x^3-2x^2+5を$x+1$で割ったときの商をQ、余りをRとしてみよう。すると、

$$P(x)=x^3-2x^2+5=(x+1)Q+R$$

となる。ここでxに-1を代入、つまり$P(-1)$を考えてみよう。すると、

$$P(-1)=(-1)^3-2(-1)^2+5=\{(-1)+1\}Q+R$$

となる。$(-1)^3-2(-1)^2+5=2$である。一方、$\{(-1)+1\}Q+R=0\cdot Q+R=R$となる。つまり、

$$R=2$$

と求まるわけだ。

このように、多項式$P(x)$を1次式$x-k$で割った時の商を$Q(x)$、余りをRとすると、$P(x)=(x-k)Q(x)+R$（Rは定数）が成り立つので、この等式の両辺のxにkを代入すると、$P(k)=R$が得られる。これを剰余定理という。$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$なら、$P\left(-\frac{b}{a}\right)$で余りが求まる。

2.因数定理

例）x^3-4x^2+x+6を因数分解せよ。

「えっ・・・うーん、無理では？」と思うかもしれない。しかし、我々は剰余定理を知っている。これを応用しよう！例えば、$x=-1$を代入してみよう。すると、$(-1)^3-4(-1)^2+(-1)+6=0$となる。つまり、$x^3-4x^2+x+6=(x+1)Q(x)$となっているよね？もう少し硬い言い方をすると、x^3-4x^2+x+6は$x+1$を因数に持っているということだ！これを用いて計算することで、

$$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

とできる！！

このように、$P(x)$を因数分解したいけど、その因数が分からない時には、$P(\alpha)=0$となるαを見つけて計算するということだ！

まとめると、$P(\alpha)=0$となるとき、$x-\alpha$は$P(x)$の因数である。これを因数定理という。

3.因数の見つけ方

と言っても、$P(\alpha)=0$となるαをどうやって見つけんの！となるよね。実は、以下の方法で見つけられる！

n次の多項式$P(x)$があって、$P(\alpha)=0$となるαは、

$$\alpha=\pm\frac{定数項の約数}{最高次の文字の係数の約数}$$

である。

◊問題

1.　多項式$2x^3-x^2+5$を、次の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

（1）$2x+3$　（2）$3x-1$

2.　多項式$P(x)=x^3+ax+2$を$x-2$で割ったときの余りが4になるように、定数aの値を定めよ。

3.　次の式を、因数定理を用いて有理数の範囲で因数分解せよ。

（1）$2x^3-5x^2-x+1$　（2）$x^4-x^3-7x^2+x+6$