数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式　No.５

学習のねらい

高次方程式について理解しよう！
３乗根について理解しよう！

Ⅰ.高次方程式

「２次方程式があるのなら、３次方程式だってあるのでは？」と思う人もいるでしょう。もちろん！ある！

一般的に、３次以上の方程式を高次方程式と言い、ここでは実数を係数とする高次方程式について考える。

「解の公式を使って解くのか？」と思うかもしれないが、解の公式はあるにはあるけれど、超長いので、手計算で使うのは現実的ではない。そのため、高校数学では因数定理や因数分解を用いて解くことが多い。

例）$x^3=-8$を解け。

え！$x=-2$じゃん！と思うかもしれない。本当にそうだろうか？

$x^3=-8 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=0 \Leftrightarrow x=-2、1\pm\sqrt{3}i$となるので、解は$x=-2、1\pm\sqrt{3}i$である。

つまり、必要に応じて因数定理を用いて因数分解をして、高次方程式を解いていくということだ。一般的に、n次方程式は、複素数の範囲で常にn個の解を持つ。（２重解は２個と数える。３重解等も同様。）

2.３乗根

２乗してaになる数をaの平方根といった。同じように３乗してaになる数、つまり$x^3=a$の解を、aの３乗根という。とくに、1の３乗根、つまり$x^3=1$の解は有名な性質があるので、見ていこう！

例）$x^3=1$の解のうち、虚数であるものの１つをωとするとき、ω^2を求めよ。

まず、ωはオメガと読む。（・ω・）で見たことないかな？

$x^3=1$を解くと、$x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$となるので、

$x=1$、$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$となる。ここで$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$とする。（$-$の方でも大丈夫！）

$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$となり、あら不思議これも$x^3=1$の解になっている！

よって、以下が言える。

> $x^3=1$の虚数解の１つをωとすると、
> ①$x^3=1$の解は、1、ω、ω^2
> ②$\omega^3=1$
> ③$\omega^2+\omega+1=0$

この性質を用いた、問題があるので、◇問題で解いてみて欲しい！

◊問題

1.　次の方程式を解け。

（1）$x^3 = 27$　（2）$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$

（3）$2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$

2.　1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つをωとするとき、次の値を求めよ。

（1）$\omega^7 + \omega^8$　（2）$\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1$