

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.1

学習のねらい

内分点と外分点の座標を求められるようになろう！

2点間の距離を求められるようになろう！

重心の座標を求められるようになろう！

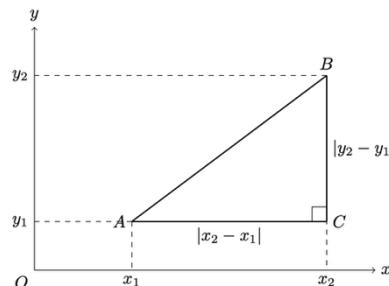
1.2 点間の距離

座標平面上の2点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ の距離 AB を求めてみよう。

$\triangle ABC$ は直角三角形であるから、三平方の定理により

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

となる。この式は直線 AB が x 軸、または y 軸に平行なときにも成り立つ。よって以下が成り立つ。



2点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ の距離 AB は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

特に、原点 O と点 $A(x_1, y_1)$ の距離 OA は

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

となる。

2. 内分点と外分点の座標

m 、 n を正の数とする。点 P が

線分 AB 上にあつて $AP : PB =$

$m : n$ が成り立つとき、点 P は

線分 AB を $m : n$ に内分するといひ、点 P を内分点という。

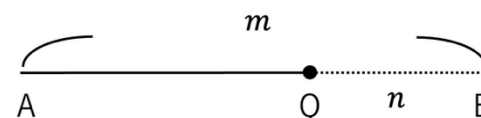
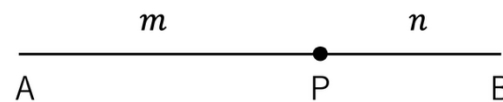
また、点 Q が線分 AB の延長上

にあつて $AQ : QB = m : n$ が成り

立つとき、点 Q は線分 AB を $m :$

n に外分するといひ。このとき、 $m \neq n$ である。点 Q を外分点という。

また、内分点 P と外分点 Q について以下で求められる。



座標平面上の2点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ の内分点を P と外分点を Q とすると以下となる。(外分は $m : (-n)$ に内分と考えると良い。)

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right), Q\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$$

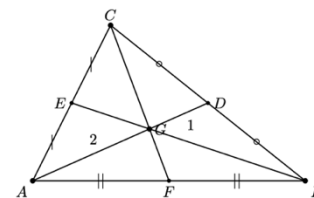
3. 重心の座標

重心は中線を2 : 1に内分する。その性質を用いて計算すると以下が分かる。

3点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ を頂点とする

$\triangle ABC$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



◇問題

1. 以下を求めよ。

(1) 2点 $A(3, -5)$ 、 $B(-1, 3)$ 間の距離を求めよ。

(2) 2点 $A(1, -2)$ 、 $B(-3, 4)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

2. 3点 $A(5, 4)$ 、 $B(0, -1)$ 、 $C(8, -2)$ について、線分 AB を $2:3$ に外分する点を P 、 $3:2$ に外分する点を Q とし、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2) 点 G の座標を求めよ。

(3) $\triangle PQS$ の重心が点 G と一致するように、点 S の座標を定めよ。

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.2

学習のねらい

直線の方程式について理解しよう！

2直線の平行と垂直の時の傾きの関係を理解しよう！

1. 直線の方程式

方程式 $3x - 4y - 12 = 0$ の表す図形を考えてみよう。これは、単純に、 $y = \frac{3}{4}x - 3$ なので、傾きが $\frac{3}{4}$ 、切片が -3 の直線である。

また、方程式 $y = 2$ の表す図形は、 y 軸に垂直な直線である。方程式 $x = -3$ の表す図形は、 x 軸に垂直な直線である。

よって、座標平面上の全ての直線は、次の形の1次方程式で表される。

$$ax + by + c = 0 \quad \text{ただし、} a, b, c \text{ は定数で } a \neq 0 \text{ または } b \neq 0$$

直線が x 軸、 y 軸とそれぞれ点 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ で交わる時、 a をこの直線の x 切片、 b をこの直線の y 切片という。

図形と方程式・・・
ちょっと難しいんだよね。

頑張ろう！



2.2 直線の平行と垂直

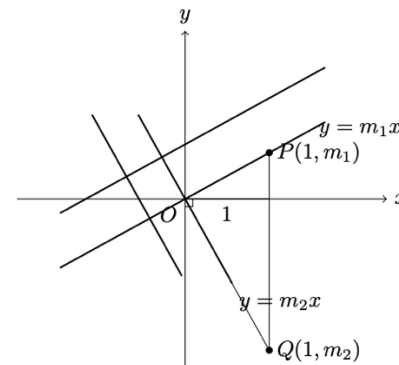
2直線 $y = m_1x + n_1$ と、 $y = m_2x + n_2$ が平行であるのは、それぞれの傾きが等しい時である。つまり、 $m_1 = m_2$ 。

では2直線 $y = m_1x + n_1$ と、 $y = m_2x + n_2$ が垂直であるときは傾きにどんな関係があるだろう。

2直線 $y = m_1x + n_1$ と、 $y = m_2x + n_2$ が垂直であるときは、それらに平行で原点 O を通る2直線 $y = m_1x$ と、 $y = m_2x$ も垂直である。

これらの直線上に、それぞれの点 $P(1, m_1)$ 、 $Q(1, m_2)$ をとると、 $\triangle OPQ$ は $\angle POQ = 90^\circ$ の直角三角形であるから、 $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$ となる。

よって、 $(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2$ となるので、 $m_1m_2 = -1$ となる。



2直線 $y = m_1x + n_1$ 、 $y = m_2x + n_2$ について

2直線が平行 $\Leftrightarrow m_1 = m_2$

2直線が垂直 $\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$

◇問題

1. 点 $(-3, 2)$ を通り、直線 $3x - 4y - 6 = 0$ に平行な直線 l と垂直な直線 l' の方程式をそれぞれ求めよ。

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.3

学習のねらい

2 直線の交点を通る直線の方程式を理解しよう！

点と直線の距離の公式を覚えよう！

1.2 直線の交点を通る直線の方程式

2 直線 $x + 2y - 4 = 0$ 、 $2x - y - 3 = 0$ に対して、方程式

$$m(x + 2y - 4) + n(2x - y - 3) = 0 \dots \textcircled{1}$$

の表す図形を考える。ただし、 m 、 n は定数とする。

①は、 $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ の解 $x = 2$ 、 $y = 1$ に対して常に成り立つ。つまり、 m 、 n がどんな値をとっても $(2, 1)$ を必ず通る。

一般的には①の両辺を n で割った式(そして $\frac{m}{n} = k$ として)

$$k(x + 2y - 4) + (2x - y - 3) = 0$$

を用いる。これを整理すると、

$$(k + 2)x + (2k - 1)y - 4k - 3 = 0$$

$k + 2$ と、 $2k - 1$ は同時に0にならないので、①は、 $(2, 1)$ を通る直線を表すということ。

点と直線の距離が実は超大事！

見た目はイカついけどね・・・



2. 点と直線の距離

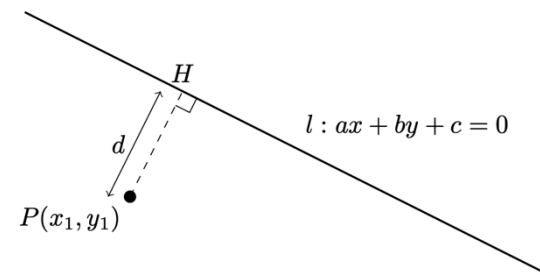
点 $P(x_1, y_1)$ から直線 l に下ろした垂線を PH とする。

この PH の長さを点 P と直線 l の距離という。

$PH = d$ とし、 l の方程式を $ax + by + c = 0$ とするとき、

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で表すことができる。証明も大切だけど、まずは公式を覚えて使えるようになろう！



$ax + by + c = 0$ で表される直線と点 $P(x_1, y_1)$ の距離 d は、

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Topic—AI はデータをどう分類している？

AI では、データを座標上の点として表し、それらを分ける境界線を考えて分類する方法がある。例えば、学習したデータをもとに境界線を決め、新しいデータがどちら側にあるかを判定する。

このとき、境界線からどれくらい離れているかという「距離」の考え方が利用される場合もある。

高校数学で学ぶ図形と方程式は、現代の AI やデータ分析につながる考え方の一つになっている。

◇問題

1. 方程式 $(k+2)x + (k-1)y - 3k = 0$ が、 k の値によらずある定点を通るとき、その定点の座標を求めよ。

2. 点 P が放物線 $y = x^2$ 上を動くとき、点 P と直線 $2x - y - 6 = 0$ との距離の最小値を求めよ。

3. 点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $l: ax + by + c = 0$ について、 P から l に下ろした垂線の長さを d とする。

直線 l 上の x 軸と y 軸との交点 $A(-\frac{c}{a}, 0)$ 、 $B(0, -\frac{c}{b})$ ($abc \neq 0$) をと

る。 $\triangle PAB$ の面積を ①底辺×高さ ②三角形の面積公式 の2通りで表し、

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となることを証明せよ。

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.4

学習のねらい

円の方程式を理解しよう！

円と直線の交点を求められるようになろう！

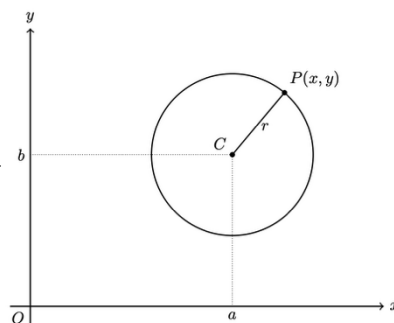
1. 円の方程式

今まで、直線や放物線の方程式などを学んできた。今回は、円の方程式を学ぶ。

中心 C の座標が (a, b) 、半径の長さが r の円の方程式を考えよう。円周上に点 $P(x, y)$ を取ると、 x と y が常に満たす関係式が、円の方程式となる。 PC の距離は常に r である。2点間の距離の公式から、

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

となる。これが円の方程式だ。



点 (a, b) を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

特に、原点 O を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. 円の方程式の一般形

一般に円の方程式は、 l, m, n を定数として、次の形に表される。

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

つまり、これを $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の形に変形する必要がある。

その時に用いるのが平方完成だ！ x に関して平方完成、 y に関して平方完成して、定数項を右辺に持っていくということだ。まあ、問題で慣れて欲しい。

例) 方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ の表す図形

この方程式を変形すると、

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = 20$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 20 + 1 + 4$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

となるので、これは点 $(-1, 2)$ を中心とし、半径が5の円を表す。

3. 円と直線の共有点

円と直線が共有点をもつとき、その共有点の座標は、それらの図形の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。まあ、今まで通りだ。

円の方程式が出てきたね！

頑張っていきましょう！



◇問題

1. 2点 $(1, -1)$ 、 $(5, 2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

2. 方程式 $x^2 + 4x + y^2 - 4ay + 3a^2 - 2a + 7 = 0 \cdots \textcircled{1}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\textcircled{1}$ が円を表すとき、 a の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき、円 $\textcircled{1}$ が y 軸に接するような a の値を求めよ。

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.5

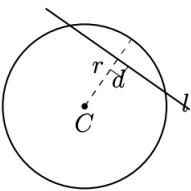
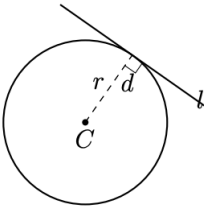
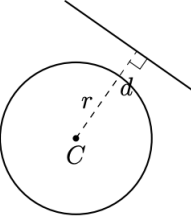
学習のねらい

円と直線の位置関係を理解しよう！

円の接線の求め方を知ろう！

1. 円と直線の位置関係

しかし、共有点を何個持つか？という問いだけだったら、判別式または、中心と直線の距離を考えることで求めることができる。

共有点の個数	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
共有点の個数	2	1	0
判別式 D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
d と r の関係	$d < r$ 	$d = r$ 	$d > r$ 

2. 円の接線

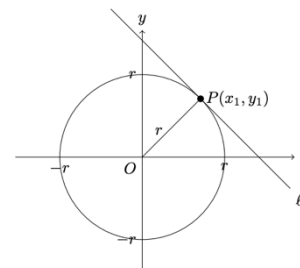
円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は、

$$x_1x + y_1y = r^2$$

この公式は覚えておこう！ではこの公式を証明していこう！

P は座標軸上にないとする。このとき、 $x_1 \neq 0$ 、 $y_1 \neq 0$ である。

右の図で直線 OP の傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ である。接線 l は OP



に垂直であるから、 l の傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$ である。

よって、 l の方程式は

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

となる。これを整理すると、 $x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$ である。 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ であるから、 $x_1x + y_1y = r^2 \dots \textcircled{1}$ となる。

また、 P が x 軸上にある時、接線の方程式は、 $x = r$ または、 $x = -r$ 。

P が y 軸上にある時、接線の方程式は、 $y = r$ または、 $y = -r$

ゆえに、 P が座標軸上にある場合の接線の方程式も $\textcircled{1}$ で表される。

◇問題

1. 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = x + k$ が異なる2点で交わる時、定数 k の値の範囲を求めよ。

2. 円 $x^2 + y^2 = 25$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めよ。

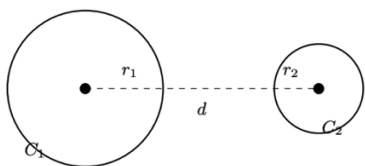
数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.6

学習のねらい

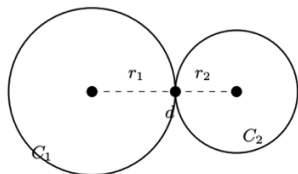
2つの円の位置関係について理解しよう！

2つの円 C_1 、 C_2 があり、それぞれの半径の長さを r_1 、 r_2 とし、2つの円の中心間の距離を d とする。2つの円の位置関係は以下のように、 r_1 と r_2 と d を使って表すことができる。

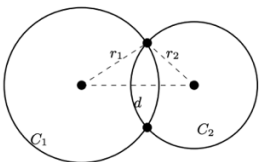
① $d > r_1 + r_2$: 交点をもたない



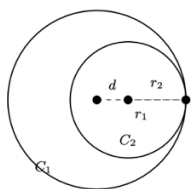
② $d = r_1 + r_2$: 外接する



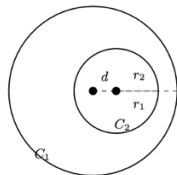
③ $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$: 2点で交わる



④ $d = |r_1 - r_2|$: 内接する



⑤ $d < |r_1 - r_2|$: 交点を持たない



Topic—自己紹介

初めまして！算数・数学のアトリエ講師の、だいちです。

最初は、高校の数学の先生になることを目指していました。そのために授業や教材の研究をして、このプリントもその一つとして作っていました。

ただ、自分は心の不調を抱えていて、教育実習の途中で継続が難しくなり、教員免許の取得を断念することになりました。

当時は、進む道が見えなくなってしまって、「自分は何がしたかったんだろう」と何度も考えました。その中で思い出したのが、

「算数・数学を、もっとわかりやすく届けたい」

「算数・数学を好きになる人を少しでも増やしたい」

という気持ちでした。

だったら、学校という形だけじゃなくてもいい。動画やプリント、講演などを通して、小学校から大学まで、誰でも学び直せる環境を作ろう。そう考えて始めたのが、「算数・数学のアトリエ」です。目標は少し大きいかもしれませんが、でも、一人でも「数学って面白いかも」「もう一回やってみようかな」と思ってくれる人が増えたら嬉しいです。

この活動が、必要としている誰かに届くことを願って、今日も教材を作っています。

一緒に頑張っていこう！

◇問題

1. 次の2つの円の位置関係を調べよ。

(1) $x^2 + y^2 = 1$ と $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

(2) $x^2 + y^2 = 4$ と $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$

2. 中心が点 $(4, 3)$ である円 C と、円 $x^2 + y^2 = 1$ が外接するとき、円 C の方程式を求めよ。

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.7

学習のねらい

軌跡について理解しよう！

ある条件を満たす点が動いてできる図形のことを、軌跡という。

例) 点(3,4)からの距離が5である点Pの軌跡を求めよ。

ある点から等しい距離にある点の集合なので、円になる。つまり点Pの軌跡は $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ のように、答えられれば良いということ。しかし、こんな簡単に図形が分かる問題は少ない。

例) t を実数とする。点 $(t-1, 2t^2-3t+1)$ の描く軌跡を求めよ。

こうなるとお手上げ。しかし軌跡はステップを守れば必ず解けるので、そのステップを辿りながら解いてみよう。まずはこれの解答から。

$X = t-1, Y = 2t^2-3t+1$ とする。すると、 $t = X+1$ なので、これを Y に代入する。すると、

$$Y = 2t^2 - 3t + 1 = 2(X+1)^2 - 3(X+1) + 1 = 2X^2 + X$$

よって、求める軌跡は、 $y = 2x^2 + x$

ではステップを確認していこう！

Step.1

軌跡を求める点の座標を (X, Y) とおく。

Step.2

与えられた条件を使って、 X, Y の関係式を作る。

Step.3

X, Y 以外の文字(変数)を削除する。

Step.4

(X, Y) を (x, y) に置き換えて完成！

(X, Y) と置くことで、 (x, y) と混ざらないようにしている。また、最後の置き換える部分は、勝手にやって良いの？と思うかもしれない。なぜやって良いかということ、あくまで、 (X, Y) の関係式であって、その文字を (x, y) という馴染みある文字に変えただけであり、別に、関係式としては成り立っているじゃん！ってことね。

軌跡はわかりにくいよね・・・

難しいよね・・・

頑張りましたよ！



◇問題

1. t を実数とする。点 $(t-1, 2t+1)$ の描く軌跡を求めよ。

2. 2点 $A(0, 0)$ 、 $B(3, 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.8

学習のねらい

領域について理解しよう！

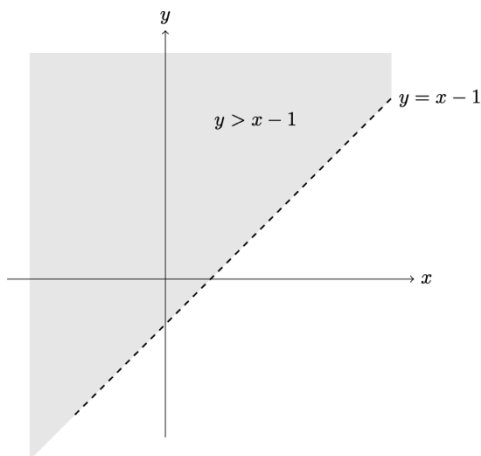
座標平面上で、 x 、 y の1次方程式 $y = x - 1$ を満たす点 (x, y) 全体の集合は直線である。では、 $y > x - 1$ はどうなるだろう。

これは、 $y = x - 1$ よりも上側にある部分のことを指している。

また、 $=$ が付いていないので、 $y = x - 1$ 上は、 $y > x - 1$ という関係式を満たさない。よって、右の図のような灰色の部分に答えとなるわけだ。

このように、 x と y の不等式によって定まる点 (x, y) の存在範囲のことを**領域**という。

$y > x - 1$ の領域は、 $y = x - 1$ の直線の上側すべてである。ただし境界線($y = x - 1$)は領域に含まない。



直線 $y = mx + n$ を l とする。

不等式 $y > mx + n$ の表す領域は直線 l の上側の部分

不等式 $y < mx + n$ の表す領域は直線 l の下側の部分

$y \geq mx + n$ や $y \leq mx + n$ の表す領域は直線 $y = mx + n$ を含む。

円についても同じように考えることができる。

円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ を C とする。

不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域は円 C の内部

不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ の表す領域は円 C の外部

ただしどちらも境界線は含まない。

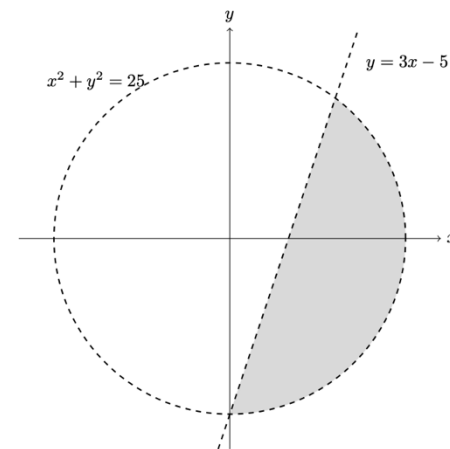
では、連立不等式の表す領域について考えてみよう。

例) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ y < 3x - 5 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 < 25$ は、 $x^2 + y^2 = 25$ の円の内部。 $y < 3x - 5$ は $y = 3x - 5$ の下側の部分。

よって、共通部分は、灰色の部分となる。ただし境界線は含まない。



このように、考えることで、連立不等式の表す領域も簡単に求めることができる。悩んだときは、例えば、 $(0, 0)$ を与式に代入することで、領域内なのか外なのかを判断することもできる。

◇問題

1. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 2x - 3$ (2) $y \leq -x + 1$ (3) $x^2 + y^2 < 1$

2. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(3x + 4y - 12)(x - 2y + 4) > 0$$

数学Ⅱ 第3章 図形と方程式 No.9

学習のねらい

線形計画法を理解しよう！

x や y に関する条件があり、不等式の表す領域を図示して解決できる問題の解き方を線形計画法という。

例) x 、 y が4つの不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 12, 2x + y \leq 8$$

を満たすとき、 $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

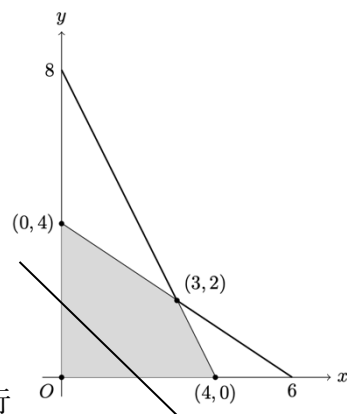
まずは、与えられた条件をもとに、領域を図示しよう。

すると、右の図のようになる。

また、 $x + y = k$ とおく。すると、これは $y = -x + k$ と変形できるので、これは傾きが -1 で y 切片が k の直線を表す。

このとき、 y 切片である k が最小となるのは、 $(0, 0)$ を通るときである。よって、代入して、 $k = 0$ が最小値。

一方、最大値は、 $y = -x + k$ の直線を平行移動していくと、 $(3, 2)$ を通るときに、 y 切片である k が最大となる。よって、代入して、 $k = 5$ が最大値となる。



ついてこられたかな。これもステップさえ踏めれば簡単なので、手順を確認していこうね！

Step.1

x 、 y の満たす条件を座標平面上に図示する。(この領域を D とする。)

Step.2

最大値や最小値を求めたい式を $= k$ とおく。

(方程式が表す図形を C とする。)

Step.3

D と C が共有点をもつ条件のもとで、 k の最大値と最小値を求める。

これにて、第3章終了！

お疲れ様！！

次も頑張ろうね！



◇問題

1. x 、 y が4つの不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 6, 2x + y \leq 6$$

を満たすとき、 $x - y$ の最大値と最小値を求めよ。

2. ある会社が2種類の製品 A、B を1単位作るのに必要な電気量、ガスの量はそれぞれ A が 2kWh、 2m^3 、B が 3kWh、 1m^3 である。また、使うことのできる総電力量は 19kWh、ガスの総量は 13m^3 であるとする。1 単位当たりの利益を A が 7 万円、B が 5 万円とするとき、A と B をそれぞれ何単位作ると、利益は最大となるか。