数学Ⅱ 第3章　図形と方程式　No.3

学習のねらい

2直線の交点を通る直線の方程式を理解しよう！
点と直線の距離の公式を覚えよう！

1.2直線の交点を通る直線の方程式

　2直線$x+2y-4=0$、$2x-y-3=0$に対して、方程式

$$m(x+2y-4)+n(2x-y-3)=0\cdots①$$

の表す図形を考える。ただし、m、nは定数とする。

　①は、$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$の解$x=2$、$y=1$に対して常に成り立つ。つまり、$m$、$n$がどんな値をとっても$(2,1)$を必ず通る。

　一般的には①の両辺をnで割った式(そして$\frac{m}{n}=k$として)

$$k(x+2y-4)+(2x-y-3)=0$$

を用いる。これを整理すると、

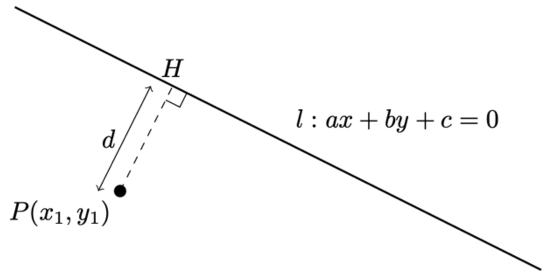
$$(k+2)x+(2k-1)y-4k-3=0$$

$k+2$と、$2k-1$は同時に0にならないので、①は、$(2,1)$を通る直線を表すということ。

点と直線の距離が実は超大事！

見た目はイカついけどね・・・

2.点と直線の距離



　点$\mathrm{P}(x_1,y_1)$から直線lに下ろした垂線をPHとする。

　このPHの長さを点Pと直線lの距離という。

　PH=dとし、lの方程式を$ax+by+c=0$とするとき、

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で表すことができる。証明も大切だけど、まずは公式を覚えて使えるようになろう！

$ax+by+c=0$ で表される直線と点$\mathrm{P}(x_1,y_1)$の距離dは、

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Topic—AIはデータをどう分類している？

　AIでは、データを座標上の点として表し、それらを分ける境界線を考えて分類する方法がある。例えば、学習したデータをもとに境界線を決め、新しいデータがどちら側にあるかを判定する。

　このとき、境界線からどれくらい離れているかという「距離」の考え方が利用される場合もある。

　高校数学で学ぶ図形と方程式は、現代のAIやデータ分析につながる考え方の一つになっている。

◊問題

1.　方程式$(k+2)x+(k-1)y-3k=0$が、kの値によらずある定点を通るとき、その定点の座標を求めよ。

2.　点Ｐが放物線$y=x^2$上を動くとき、点Ｐと直線$2x-y-6=0$との距離の最小値を求めよ。

3.　点$\mathrm{P}(x_1, y_1)$と直線l：$ax+by+c=0$について、Ｐからlに下ろした垂線の長さをdとする。

直線l上のx軸とy軸との交点$\mathrm{A}\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$、$\mathrm{B}\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ $(abc \neq 0)$をとる。△PAB の面積を　①底辺×高さ　②三角形の面積公式　の２通りで表し、

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となることを証明せよ。