数学Ⅱ 第３章　図形と方程式　No.4

学習のねらい

円の方程式を理解しよう！
円と直線の交点を求められるようになろう！

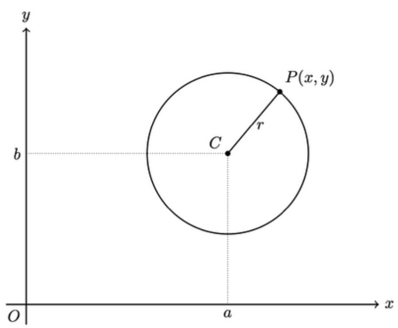
1. 円の方程式

今まで、直線や放物線の方程式などを学んできた。今回は、円の方程式を学ぶ。

中心 C の座標が(a, b)、半径の長さがrの円の方程式を考えよう。円周上に点 P (x, y)を取ると、xとyが常に満たす関係式が、円の方程式となる。PC の距離は常にrである。2 点間の距離の公式から、

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

となる。これが円の方程式だ。



点(a, b)を中心とし、半径がrの円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

特に、原点 O を中心とし、半径がrの円の方程式は

$$x^2+y^2=r^2$$

2. 円の方程式の一般形

一般に円の方程式は、l、m、nを定数として、次の形に表される。

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

つまり、これを$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$の形に変形する必要がある。その時に用いるのが平方完成だ！xに関して平方完成、yに関して平方完成して、定数項を右辺に持っていくということだ。まぁ、問題で慣れて欲しい。

例）方程式$x^2+y^2+2x-4y-20=0$の表す図形

この方程式を変形すると、

$$(x^2+2x)+(y^2-4y)=20$$
$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=20+1+4$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$$

となるので、これは点$(-1, 2)$を中心とし、半径が5の円を表す。

3. 円と直線の共有点

円と直線が共有点をもつとき、その共有点の座標は、それらの図形の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。まぁ、今まで通りだ。

円の方程式が出てきたね！

頑張っていきましょう！

◊問題

1.　2 点$(1,-1)$、$(5,2)$を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

2.　方程式$x^2+4x+y^2-4ay+3a^2-2a+7=0\cdots$①について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式①が円を表すとき、aの範囲を求めよ。

(2) (1)のとき、円①がy軸に接するようなaの値を求めよ。