

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.1

学習のねらい

一般角と弧度法について理解しよう！

1. 一般角

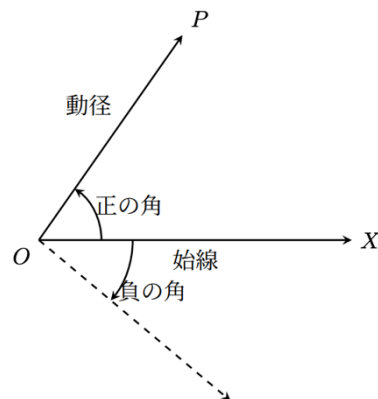
角度を考えると、普通、 0° から 360° の範囲で考える。まずは、この概念を拡張していこう。

右の図のように、固定されている半直線 OX と動く半直線 OP を考える。OX を始線、OP を動径という。

動径の回転には2つに向きがある。時計の針の回転と逆の向きを正の向き、時計の針の回転と同じ向きを負の向きという。

また、正の向きの回転の角を正の角、負の向きの回転の角を負の角という。

次に、 400° について考えよう。これは、 360° 回転した後、 40° 回転させたということだ。つまり、 40° と 400° は同じ角度を表している。他にも、 760° は $760^\circ = 40^\circ + 360^\circ \times 2$ 、 $-320^\circ = 40^\circ + 360^\circ \times (-1)$ も同じ角度を表していることになる。一般に始線と動径のなす角度は $\alpha + 360^\circ \times n$ (n は整数)と表すことができる。 n の値を変えても動径 OP の位置は同じだ。このように表した角度を一般角という。



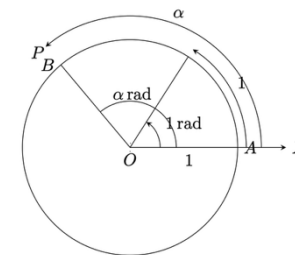
2. 弧度法

これまで、角の大きさを表すのに、 30° や 60° 、 135° などの度数法を用いてきた。ここでは、角の大きさを表す別の方法について学ぶ。というのも、扇形の面積や、弧の長さを求めるときに、式がちょっとダルいからだ。(いや、そんなダルくないよ！とも思うかもだけど・・・。)なぜ

ならば、扇形の面積 $S = \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{360^\circ}$ という形になる。もっとシンプルにで

きないだろうか。

点 O を中心とする半径 1 の円 (単位円) と半直線 OX, OP との交点をそれぞれ A, B とする。このとき、 $\angle XOP$ の大きさに応じて弧 AB の長さは一意に定まり、その長さは角の大きさに比例する。



そこで、半径が 1 であることを利用して、単位円上の弧の長さそのものを角の大きさとして表すことにした。このような角の表し方を弧度法といい、単位をラジアン(rad)という。

半径 1 の円の場合、円周の長さは 2π となる。つまり、 $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ である。よって、 $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ 、 $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$ 、 $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$ 、 $\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$ 、 $\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$ だ。ちなみに、 $1 \text{ rad} = 57.3^\circ$ である。また、基本radは省略される。よって、 $\frac{\pi}{6} (= 30^\circ)$ のように書かれる。以下は◇問題で証明する。

弧度法を用いた場合、半径が r 、中心角が θ の扇形の弧の長さを l 、面積を S とすると、以下の公式が得られる。

$$l = r\theta \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

◇問題

1. 次の角を、度数法を弧度法で、弧度法を度数法で表せ。

(1) 210° (2) 300° (3) $\frac{2\pi}{3}$ rad (4) $\frac{3\pi}{4}$ rad

2. 次の表を完成させよ。

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法									

3. 次のような扇形の弧の長さや面積を求めよ。

(1) 半径が4、中心角が $\frac{\pi}{5}$ (2) 半径が6、中心角が $\frac{5}{6}\pi$

4. 半径が r 、中心角が θ の扇形の弧の長さを l 、面積を S とする。

$$l = r\theta \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

この公式を証明せよ。

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.2

学習のねらい

三角関数の定義を理解しよう！

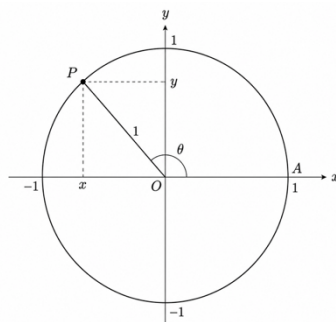
三角関数の基本公式を理解して覚えよう！

三角関数の変換を理解しよう！

1. 三角関数

数学Ⅰの時と同じように、単位円を考えて、 $\angle AOP = \theta$ としたとき、 $\sin \theta = y$ 、 $\cos \theta = x$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ となる。

単位円周上の
 x 座標が $\cos \theta$ 、 y 座標が $\sin \theta$ 、傾きが $\tan \theta$
である。



つまり、角度 θ によって、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値が変わる関数であるということだ。このように考えたものを三角関数という。なお数学Ⅱでは θ は任意の値となる。

また、図の通り $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ となる。 $\tan \theta$ の値の範囲は実数全体である。

2. 三角比の基本公式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

3. 三角関数の変換

$\frac{\pi}{2} - \theta$ や $\pi - \theta$ の三角比を求める場面がある。公式を覚える必要はない。仕組みを理解して、単位円を用いてその場で導出できるようにしよう。

① $\theta + 2n\pi$

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \quad \tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta$$

② $-\theta$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

③ $\theta + \pi$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \quad \tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

④ $\pi - \theta$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

⑤ $\theta + \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

⑥ $\frac{\pi}{2} - \theta$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

◇問題

1. θ が次の値のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

(1) $\frac{23}{6}\pi$ (2) $-\frac{5}{4}\pi$

2. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$ のとき、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

3. $\cos^2 \theta + \sin \theta - \tan \theta (1 - \sin \theta) \cos \theta$ を計算せよ。

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.3

学習のねらい

三角関数のグラフについて理解しよう！

三角関数のグラフの性質を理解しよう！

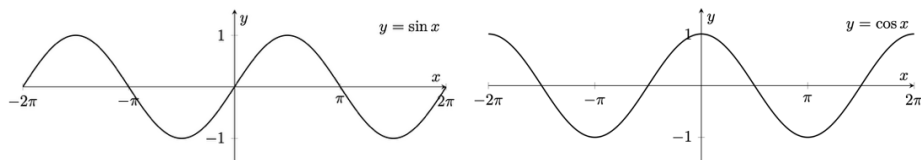
グラフの移動について理解しよう！

1. 三角関数のグラフ

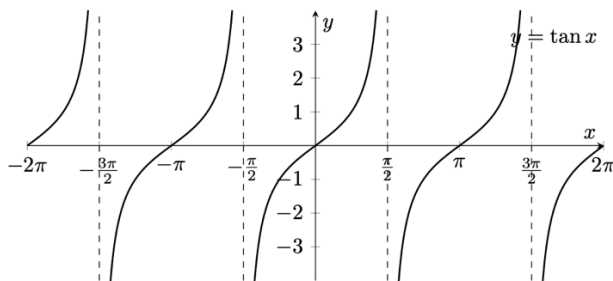
$y = \sin x$ 、 $y = \cos x$ 、 $y = \tan x$ を考えよう。

① $y = \sin x$

② $y = \cos x$



③ $y = \tan x$



$y = \tan x$ は、 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ に限りなく近づく。このような直線を漸近線という。

2. 三角関数のグラフの性質

前回のプリントで、② $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ 、 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ と学習した。つまり、 $f(x) = y = \sin x$ は、常に $f(-x) = -f(x)$ が成り立ち、 $g(x) = y = \cos x$ は、常に $g(-x) = g(x)$ が成り立つ。

常に $f(-x) = -f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は奇関数といい、

常に $f(-x) = f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は偶関数という。

奇関数は原点对称に、偶関数はy軸対称になる。

$y = \sin x$ 、 $y = \tan x$ は奇関数、 $y = \cos x$ は偶関数である。

3. グラフの移動

$y = 2 \sin x$ は、 $y = \sin x$ のグラフをy軸方向に2倍に拡大したもの。周期は 2π となる。

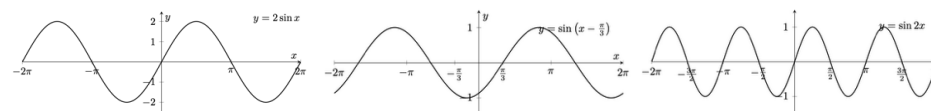
$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ は、 $y = \sin x$ のグラフをx軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの。周期は 2π となる。

$y = \sin 2x$ は、 $y = \sin x$ のグラフをx軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもの。周期は π となる。

① $y = 2 \sin x$

② $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

③ $y = \sin 2x$



◇問題

1. $y = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$ のグラフを描け。また、その周期を答えよ。

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.4

学習のねらい

三角関数の応用問題について理解しよう！

1. 三角関数の方程式

例) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 θ の値を求めよ。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

右の図のように、単位円周上で y 座標

が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は P と Q の 2 箇所である。

半径は1なので、斜辺の長さは1。そして、高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、有名な $1:2:\sqrt{3}$ の三角形である。求める角度

は、 $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ であるから、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$

大切なのは、単位円を書くこと。慣れてくると、書かなくてもできるようになるが、初めのうちは単位円を書いて問題を解けるようにしよう！

2. 三角関数の不等式

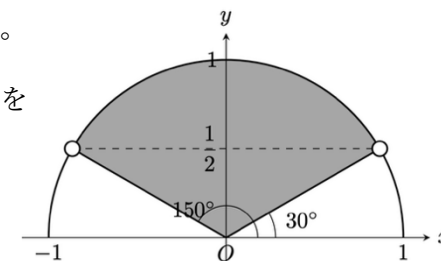
例) $\sin \theta > \frac{1}{2}$ のとき、 θ の値の範囲を求めよ。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

これも単位円を使うと簡単に解ける。

右の図を見れば分かる通り、 y 座標が $\frac{1}{2}$ を

超える角度は、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ である。

よって、答えは、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$



何も難しいことはしていない。単位円を書いて、それを超える角度は幾つだろう？と考えるだけである。ぜひ◇問題で慣れて欲しい。なお、方程式も不等式も θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ 。つまり、数学Ⅰよりも範囲が広がっているので注意。

3. 三角関数の最大値・最小値

例) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数 $y = \sin^2 x + 2 \sin x$ の最大値・最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

$\sin x = t$ とすると、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq t \leq 1$ 。よって、 $y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$ となる。

よって、 $t = 1$ で最大値3をとり、 $t = -1$ で最小値-1をとる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $t = 1$ で、 $\sin x = 1$ より、 $x = \frac{\pi}{2}$ 。 $t = -1$ で、 $\sin x = -1$ より、

$x = \frac{3}{2}\pi$ 。

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ で、最大値3、 $x = \frac{3}{2}\pi$ で、最小値-1。

◇問題

1. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \sin \theta = -\frac{1}{2} \quad (2) \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$(4) \sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5) \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6) \tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad (2) 2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$$

3. 関数 $y = 4 \sin^2 x - 4 \cos x + 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

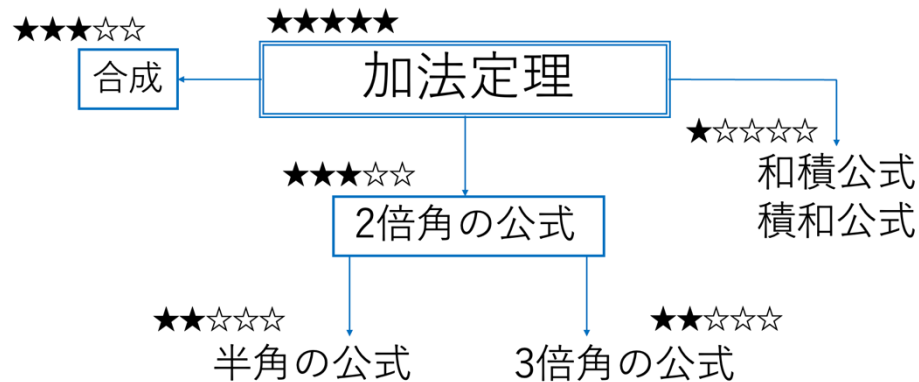
数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.5

学習のねらい

加法定理について理解しよう！

1. 加法定理の関係図

まずは、今後出てくる公式について関係図を紹介する。



ざっくりこんな感じ。★が”重要度”。他の公式達の全ての生みの親である加法定理から、学んでいこう。加法定理は、確実に全て覚えるようにしよう！

2. 加法定理

このプリントでは、弧度法ではなく度数法を用いて解説する。

さて、 $\sin 30^\circ$ って、 $\sin(90^\circ - 60^\circ)$ とも考えられるよね。では、 $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 90^\circ - \sin 60^\circ$ とできるだろうか？計算してみよう。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ - \sin 60^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので、どうやら、 $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 90^\circ - \sin 60^\circ$ では無いっぽい。

でも例えば、 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$ と考えて計算したい場面があるんだよね。そこで、昔の人は頑張った。結果生まれたのが[加法定理](#)である！証明は、No.5 補足でやろう。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

例) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

これで、有名角の足し算や引き算(例えば、 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ 、 $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ など)を求めることができるわけだ。

高校数学では最終的に弧度法で扱うことが多いので、後で少しずつ慣れていこう。

◇問題

1. 加法定理を用いて、次の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ$ (2) $\sin 15^\circ$ (3) $\tan 75^\circ$ (4) $\sin 165^\circ$

2. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて、次の値を求めよ。

$$\cos \frac{\pi}{12}$$

3. $\tan$ の加法定理を用いて、2 直線 $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$ 、 $3\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ のなす角鋭角 θ を求めよ。

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.5 補足

学習のねらい

加法定理を証明しよう！

加法定理を今回は証明してみよう。まずは、以下の等式を示す。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

右の図において、単位円上に点 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $B(\cos \beta, -\sin \beta)$ をとる。

このとき、 $\angle AOB = \alpha + \beta$ である。まず、2点間の距離の公式より、弦 AB の長さを求める。

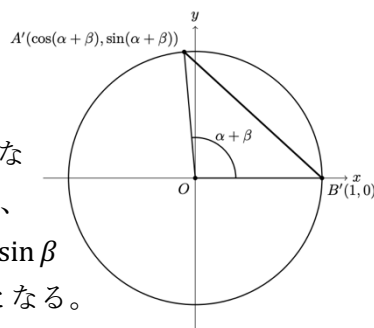
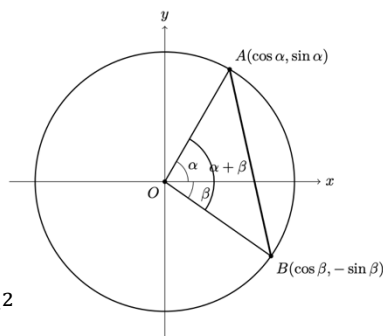
$$\begin{aligned} AB^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + \{\sin \alpha - (-\sin \beta)\}^2 \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 \end{aligned}$$

これを展開し、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使うと、

$$AB^2 = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$$

また、回転をしても長さは変わらないから、右の図のようにできる。この図において、 $A'B'$ の長さを求めると、

$A'B'^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$ となり、 $A'B'^2 = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta)$ となる。よって、 $2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$ より、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ となる。



出てきた等式の β を $-\beta$ に置き換えると、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

となる。

また、 α を $\frac{\pi}{2} - \alpha$ に置き換えると、

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

となる。

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin(\alpha + \beta)$$

であり、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ 、 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ となるので、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

となる。この β を $-\beta$ に置き換えると、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

となる。

また、 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$ となり、分母と分子を

$\cos \alpha \cos \beta$ で割ると、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

となる。この β を $-\beta$ に置き換えると、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

が得られる。

◇問題

1. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 、 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 、 $\sin \beta = \frac{12}{13}$ のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ の値をそれぞれ求めよ。

2. $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{5}{4}$ 、 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{5}{4}$ のとき、 $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。
ヒント： $(\sin \alpha - \sin \beta)^2$ と $(\cos \alpha + \cos \beta)^2$ を計算してみよう。

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.6

学習のねらい

2倍角の公式と半角の公式について理解しよう！

1.2 倍角の公式

ここから、様々な公式を紹介していくが、最初に述べた通り、すべて加法定理から導かれるものである。

さて、 $\alpha + \beta$ の方の加法定理で、 $\alpha = \beta = \theta$ としてみよう。すると、以下が得られる。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

加法定理で、 $\alpha = \beta = \theta$ とすると得られる公式なので、このプリントでは証明を省略するね。一つだけ言っておくと、 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ の変形は、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いているよ。

2. 半角の公式

$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ を用いて、式変形する。

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

最後の $\Leftrightarrow$ は、 θ を $\frac{\theta}{2}$ に変えると、 2θ が θ に変わるというカラクリ。また、

$\tan^2 \frac{\theta}{2}$ は、以下ようになる。

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

よって、以下の公式が得られる。

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

久しぶり！！三角関数どう？難しいよね。

でも、理解できたらあとは単純作業だから、
得点源にしやすい単元なんだ！

頑張ろう！



◇問題

1. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $\cos 2\theta$ 、 $\sin 2\theta$ 、 $\tan \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

2. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta = \cos \theta$ (2) $\cos 2\theta - 3\cos \theta + 2 \geq 0$

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.7

学習のねらい

積和の公式と和積の公式を理解しよう！

1. 積和の公式

これは、和を積の形にする公式。和積の公式も積和の公式もだけど、覚えなくて良い！！！やったね！ただし、必ずその場で導出できるようにすること！

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

を足し算すると、 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ となるので、

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

これと同じように計算することで、以下の公式が得られる。

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

2. 和積の公式

$\sin A + \sin B$ を積の形で表す。

まず、 $A = \alpha + \beta$ 、 $B = \alpha - \beta$ となる、 α 、 β を求める。すると、

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

とできる。 $A = \alpha + \beta$ 、 $B = \alpha - \beta$ より、 $\alpha = \frac{A+B}{2}$ 、 $\beta = \frac{A-B}{2}$ なので、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

となる。このような式変形を考えることで、以下の公式が得られる。

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

最初にも言ったけど、覚えなくていい！！！！これはその場で導出するもの！まあ、覚えたい人は覚えてもいいけどね。

あと、これは、数学Ⅲでよく使うので、理系の人は必ず導出できるようにしようね。

◇問題

1. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ \cos 45^\circ$ (2) $\cos 45^\circ \cos 75^\circ$ (3) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

2. 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ (2) $\cos 15^\circ + \cos 105^\circ$ (3) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.8

学習のねらい

三角関数の合成をできるようになろう！

三角関数の合成というものをやろう。これむっちゃ大事。感覚的には、加法定理の逆計算をしている。

例) $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形にせよ。

問題文からわかるように、 $\sin$ と $\cos$ の式を $\sin$ だけの式にしているから、合成なんだね。では実際に手順を紹介しよう。なぜ、こんな式変形を？と思うかもしれないけど、後で理由を説明するので、一旦受け入れて欲しい。

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta &= 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

と、いう感じ。分かんないね。

まず、なぜ2で括ったのかを説明しよう。 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を見た時

に、 $\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha$ を使いたいと思う。

$\sin \theta$ の係数は $\cos \alpha$ で、 $\cos \theta$ の係数は $\sin \alpha$ なので、1と $\sqrt{3}$ をそれぞれ $\cos \alpha$ と $\sin \alpha$ にしたい。ところが、 $\cos \alpha$ と $\sin \alpha$ は-1から1までの値しか取らないので、1と $\sqrt{3}$ の比を変えないまま、 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ が成り立つ

値にしたい。なので、 $(1 \cdot k)^2 + (\sqrt{3}k)^2 = 1$ となる k を考える。すると、

$$k = \frac{1}{2} \text{ となる。よって、} y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ のよ}$$

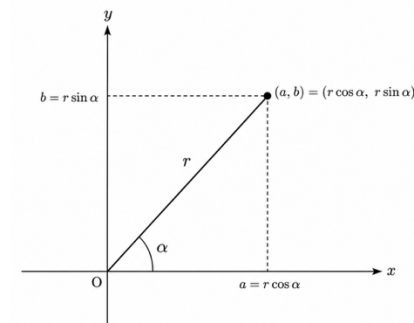
うに変形した。そして、 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるような α は $\alpha = \frac{\pi}{3}$ な

ので、 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$ とできる！ということ。

まあ、色々書いたけど、手順はこれ！

$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ ($r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$)のとき、 r と α を求める。

- ① xy 平面上に点 (a, b) を取る。
- ② 原点 O から点 (a, b) までの距離 r を求める。
- ③ 点 O と点 (a, b) を結んだ直線と x 軸とのなす角 α を求める。



ちなみに、1と $\sqrt{3}$ をそれぞれ $\sin \alpha$ と $\cos \alpha$ にすると $\cos$ の加法定理を使うことになる。まあ、ほぼ使わないけど。

◇問題

1. 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

(1) $\sin \theta + \cos \theta$ (2) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$

2. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

$$y = \cos \theta - \sin \theta$$