

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.4

学習のねらい

三角関数の応用問題について理解しよう！

1. 三角関数の方程式

例) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 θ の値を求めよ。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

右の図のように、単位円周上で y 座標

が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は P と Q の2箇所である。

半径は1なので、斜辺の長さは1。そして、高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、有名な $1:2:\sqrt{3}$ の三角形である。求める角度

は、 $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ であるから、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$

大切なのは、単位円を書くこと。慣れてくると、書かなくてもできるようになるが、初めのうちは単位円を書いて問題を解けるようにしよう！

2. 三角関数の不等式

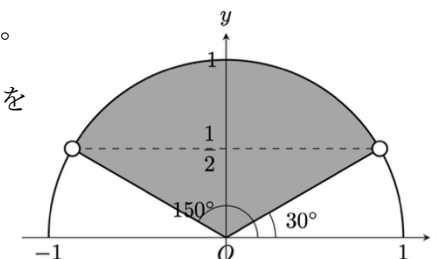
例) $\sin \theta > \frac{1}{2}$ のとき、 θ の値の範囲を求めよ。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

これも単位円を使うと簡単に解ける。

右の図を見れば分かる通り、 y 座標が $\frac{1}{2}$ を

超える角度は、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ である。

よって、答えは、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$



何も難しいことはしていない。単位円を書いて、それを超える角度は幾つだろう？と考えるだけである。ぜひ◇問題で慣れて欲しい。なお、方程式も不等式も θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ 。つまり、数学Ⅰよりも範囲が広がっているので注意。

3. 三角関数の最大値・最小値

例) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数 $y = \sin^2 x + 2 \sin x$ の最大値・最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

$\sin x = t$ とすると、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq t \leq 1$ 。よって、 $y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$ となる。

よって、 $t = 1$ で最大値3をとり、 $t = -1$ で最小値-1をとる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $t = 1$ で、 $\sin x = 1$ より、 $x = \frac{\pi}{2}$ 。 $t = -1$ で、 $\sin x = -1$ より、

$x = \frac{3}{2}\pi$ 。

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ で、最大値3、 $x = \frac{3}{2}\pi$ で、最小値-1。

◇問題

1. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \sin \theta = -\frac{1}{2} \quad (2) \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$(4) \sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5) \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6) \tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad (2) 2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$$

3. 関数 $y = 4 \sin^2 x - 4 \cos x + 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。