

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.5 補足

学習のねらい

加法定理を証明しよう！

加法定理を今回は証明してみよう。まずは、以下の等式を示す。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

右の図において、単位円上に
点 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $B(\cos \beta, -\sin \beta)$ をとる。

このとき、 $\angle AOB = \alpha + \beta$ である。まず、
2点間の距離の公式より、弦 AB の長さを
求める。

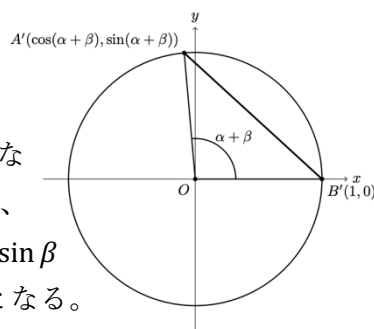
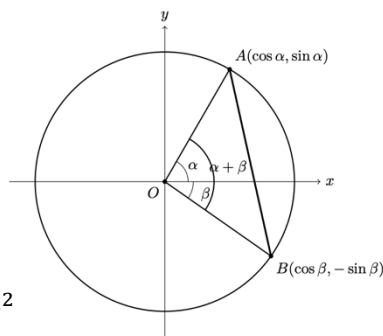
$$\begin{aligned} AB^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + \{\sin \alpha - (-\sin \beta)\}^2 \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 \end{aligned}$$

これを展開し、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使うと、

$$AB^2 = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$$

また、回転をしても長さは変わらないか
ら、右の図のようにできる。この図におい
て、 $A'B'$ の長さを求めると、

$A'B'^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$ とな
り、 $A'B'^2 = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta)$ となる。よって、
 $2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$
より、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ となる。



出てきた等式の β を $-\beta$ に置き換えると、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

となる。

また、 α を $\frac{\pi}{2} - \alpha$ に置き換えると、

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

となる。

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin(\alpha + \beta)$$

であり、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ 、 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ となるので、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

となる。この β を $-\beta$ に置き換えると、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

となる。

また、 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$ となり、分母と分子を

$\cos \alpha \cos \beta$ で割ると、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

となる。この β を $-\beta$ に置き換えると、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

が得られる。

◇問題

1. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 、 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 、 $\sin \beta = \frac{12}{13}$ のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ の値をそれぞれ求めよ。

2. $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{5}{4}$ 、 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{5}{4}$ のとき、 $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。
ヒント： $(\sin \alpha - \sin \beta)^2$ と $(\cos \alpha + \cos \beta)^2$ を計算してみよう。