

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.6

学習のねらい

2倍角の公式と半角の公式について理解しよう！

1.2 倍角の公式

ここから、様々な公式を紹介していくが、最初に述べた通り、すべて加法定理から導かれるものである。

さて、 $\alpha + \beta$ の方の加法定理で、 $\alpha = \beta = \theta$ としてみよう。すると、以下が得られる。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

加法定理で、 $\alpha = \beta = \theta$ とすると得られる公式なので、このプリントでは証明を省略するね。一つだけ言っておくと、 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ の変形は、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いているよ。

2. 半角の公式

$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ を用いて、式変形する。

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

最後の $\Leftrightarrow$ は、 θ を $\frac{\theta}{2}$ に変えると、 2θ が θ に変わるというカラクリ。また、

$\tan^2 \frac{\theta}{2}$ は、以下ようになる。

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

よって、以下の公式が得られる。

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

久しぶり！！三角関数どう？難しいよね。

でも、理解できたらあとは単純作業だから、
得点源にしやすい单元なんだ！

頑張ろう！



◇問題

1. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $\cos 2\theta$ 、 $\sin 2\theta$ 、 $\tan \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

2. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta = \cos \theta$ (2) $\cos 2\theta - 3\cos \theta + 2 \geq 0$