

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.7

学習のねらい

積和の公式と和積の公式を理解しよう！

1. 積和の公式

これは、和を積の形にする公式。和積の公式も積和の公式もだけど、覚えなくて良い！！！やったね！ただし、必ずその場で導出できるようにすること！

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

を足し算すると、 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ となるので、

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

これと同じように計算することで、以下の公式が得られる。

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

2. 和積の公式

$\sin A + \sin B$ を積の形で表す。

まず、 $A = \alpha + \beta$ 、 $B = \alpha - \beta$ となる、 α 、 β を求める。すると、

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

とできる。 $A = \alpha + \beta$ 、 $B = \alpha - \beta$ より、 $\alpha = \frac{A+B}{2}$ 、 $\beta = \frac{A-B}{2}$ なので、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

となる。このような式変形を考えることで、以下の公式が得られる。

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

最初にも言ったけど、覚えなくていい！！これはその場で導出するもの！まあ、覚えたい人は覚えてもいいけどね。

あと、これは、数学Ⅲでよく使うので、理系の人は必ず導出できるようにしようね。

◇問題

1. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ \cos 45^\circ$ (2) $\cos 45^\circ \cos 75^\circ$ (3) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

2. 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ (2) $\cos 15^\circ + \cos 105^\circ$ (3) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$