

数学Ⅱ 第4章 三角関数 No.8

学習のねらい

三角関数の合成をできるようになろう！

三角関数の合成というものをやろう。これむっちゃ大事。感覚的には、加法定理の逆計算をしている。

例) $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形にせよ。

問題文からわかるように、 $\sin$ と $\cos$ の式を $\sin$ だけの式にしているから、合成なんだね。では実際に手順を紹介しよう。なぜ、こんな式変形を？と思うかもしれないけど、後で理由を説明するので、一旦受け入れて欲しい。

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta &= 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

と、いう感じ。分かんないね。

まず、なぜ2で括ったのかを説明しよう。 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を見た時

に、 $\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha$ を使いたいと思う。

$\sin \theta$ の係数は $\cos \alpha$ で、 $\cos \theta$ の係数は $\sin \alpha$ なので、1と $\sqrt{3}$ をそれぞれ $\cos \alpha$ と $\sin \alpha$ にしたい。ところが、 $\cos \alpha$ と $\sin \alpha$ は-1から1までの値しか取らないので、1と $\sqrt{3}$ の比を変えないまま、 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ が成り立つ

値にしたい。なので、 $(1 \cdot k)^2 + (\sqrt{3}k)^2 = 1$ となる k を考える。すると、

$$k = \frac{1}{2} \text{ となる。よって、} y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ のよ}$$

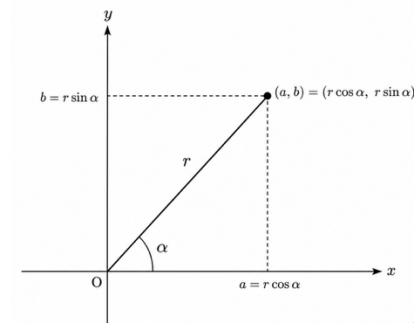
うに変形した。そして、 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるような α は $\alpha = \frac{\pi}{3}$ な

ので、 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$ とできる！ということ。

まあ、色々書いたけど、手順はこれ！

$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ ($r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$)のとき、 r と α を求める。

- ① xy 平面上に点 (a, b) を取る。
- ② 原点 O から点 (a, b) までの距離 r を求める。
- ③ 点 O と点 (a, b) を結んだ直線と x 軸とのなす角 α を求める。



ちなみに、1と $\sqrt{3}$ をそれぞれ $\sin \alpha$ と $\cos \alpha$ にすると $\cos$ の加法定理を使うことになる。まあ、ほぼ使わないけど。

◇問題

1. 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

(1) $\sin \theta + \cos \theta$ (2) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$

2. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

$$y = \cos \theta - \sin \theta$$