

数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.1

学習のねらい

指数の拡張を理解しよう！

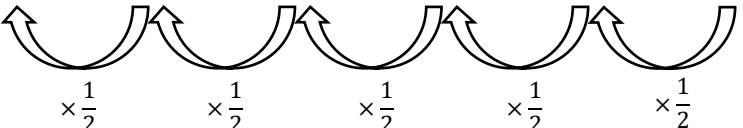
累乗根について理解しよう！

1. 指数の拡張

a^n は、 a を n 個掛け合わせたものだ。これは a の n 乗と読む。また、 a^1 、 a^2 、 a^3 、 $\dots a^n$ 、 $\dots$ をまとめて累乗といい、 a^n の a を底(てい)、 n を指数という。

さて、今まで、指数は正の数だった。しかしこれからは、負の数や有理数だって指数にできる。例えば、負の数乗について考えてみよう。

n	-2	-1	0	1	2	3
2^n	$2^{-2}=?$	$2^{-1}=?$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$



このように、表を考えると 2^n は、左に行くごとに $\frac{1}{2}$ 倍になっている。

つまり、 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ であり、 $2^{-2} = \frac{1}{4}$ になっているということだ。一般的に

$a^0 = 1$ 、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ である($a > 0$)。

2. 累乗根

では、指数が有理数だったらどうなるだろう。これを理解するために一度、累乗根というものを理解しよう。

例えば、 $2^2 = 4$ だから、 $\sqrt{4} = 2$ なわけだ。これを平方根と呼んだ。実は別名があって、2乗根ともいう。では、 $2^3 = 8$ だから、 $\dots$ っていう記号があっても良いよね。そこで、新しい記号を導入した。それが、 $\sqrt[3]{8} = 2$ という記号。これが3乗根である(立方根ともいう)。一般に、 n 乗して a になる数を a の n 乗根といい、 $\sqrt[n]{a}$ とかく。ただし $n = 2$ の場合、省略することが多い。

では、今までの指数の形で表せないかを考えよう。 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ である。よって、 $(a^?)^n = a^1$ ということだ。

今まで使ってきた指数法則は成り立たせつつ、表す方法を考えると、 $? \times n = 1$ にしたいので、 $? = \frac{1}{n}$ となる。よって、 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ということ。同

様に、 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ということだ。

よって今までの指数法則を成り立たせるように新しく定義したので、以下のようなになる。

$a > 0$ 、 $b > 0$ で、 r 、 s が有理数のとき、

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

ということで、計算は◇問題で慣れていこう。

◇問題

1. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $27^{\frac{2}{3}}$ (3) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

2. 次の計算をせよ。ただし $a > 0$ とする。

(1) $a^{-2} \times a^9 \div a^5$ (2) $\left\{\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$ (3) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[6]{\frac{9}{64}}$

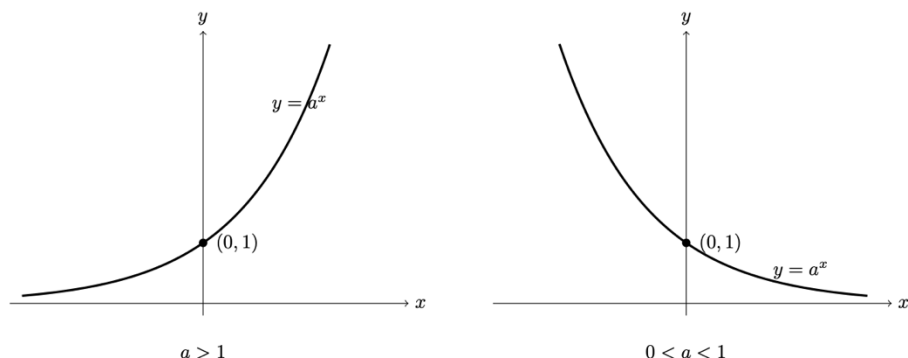
数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.2

学習のねらい

指数関数のグラフの特徴と性質を理解しよう！

1. 指数関数のグラフ

$a > 0, a \neq 1$ とすると、 $y = a^x$ は x の関数となる。関数 $y = a^x$ は底を a とする、 x の指数関数といい、以下のような見た目になる。



どちらも、必ず $(0, 1)$ を通る。なぜなら、どんな数であっても0乗したら、1になるからである。また、 x 軸に近づくが交わることはない。 $a^x = 0$ を満たす x が存在しないからである。つまり、 x 軸は漸近線である。

2. 指数関数の性質

グラフからわかるように、指数関数 $y = a^x$ には、次の性質がある。

$y = a^x$ において、

1. 定義域は実数全体である。また値域は正の数全体である。
2. $a > 1$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値も増加する。

$$p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$$

$0 < a < 1$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値は減少する。

$$p < q \Leftrightarrow a^p > a^q$$

Topic—なぜ $a > 0$ なのか

指数関数のグラフを定義するとき、「 $a > 0, a \neq 1$ とすると」とした。 $a \neq 1$ は考えればすぐわかる。 $a = 1$ のとき、 $y = 1^x$ となって、ずっと $y = 1$ になるから考える意味がない。では、なぜ、 $a > 0$ なのだろう。

まず、 $a = -2$ として考えてみよう。すると、 $x = 1, 2, 3$ となるにつれて、 $y = -2, 4, -8$ となる。まあこの時点でも扱いにくいけど、もっと困る問題がある。

例えば、 $x = \frac{1}{2}$ とすると、 $y = (-2)^{\frac{1}{2}}$ となる。これは実数では定義できない。このように、 $y = (-2)^x$ は実数 x のすべてに対して値が定まらない。つまり、実数全体を定義域とする指数関数として扱うことができない。

だから指数関数では底を $a > 0$ に限定している。

◇問題

1. 次の数の大小を比較せよ。

$$\sqrt[5]{16}, \sqrt[7]{64}$$

2. 次の方程式と不等式を解け。

$$(1) 2 \cdot 2^x = 8\sqrt{2} \quad (2) 8^{x-1} < \sqrt[3]{2} \quad (3) 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

3. 関数 $y = 4^x - 2^{x+2} + 1$ ($-1 \leq x \leq 3$) について、次の問いに答えよ。

(1) $t = 2^x$ として、 y を t の関数で表せ。また、 t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値、最小値を求めよ。

数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.3

学習のねらい

対数について理解しよう！

対数の様々な性質を理解して覚えよう！

1. 対数

例えば、 $2^x = 8$ なら、 $x = 3$ となる。では、 $2^x = 5$ のとき、 x の値はどうなるだろう。もちろん $2 < x < 3$ ということはすぐに分かるが、値を求めるのはなかなか難しい。そこで、このような値を、 $x = \log_2 5$ と書くことにした。

一般に、 $a^p = M$ が成り立つとき、これを $p = \log_a M$ と書ける。このとき、 p は a を底とする M の対数という。また、 M をこの対数の真数という。真数は常に正となる。

2. 対数の性質

対数の性質を調べてみる。

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

が成り立つから

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a \frac{1}{a} = -1$$

が成り立つ。

また、対数の定義より、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ のとき

$$a^{\log_a M} = M$$

が成り立つ。

最後に、指数法則と対数の定義から、対数について次の性質が導かれる。

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$ で、 k が実数のとき

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

これらの証明は◇問題でやろう。

3. 底の変換公式

$\log_a b = p$ とすると、 $a^p = b$ となる。 $c > 0$ 、 $c \neq 1$ として c を底とする両辺の対数をとると、 $\log_c a^p = \log_c b$ となる。つまり $p \log_c a = \log_c b$ 。よって、 $a \neq 1$ より、 $\log_c a \neq 0$ であるから

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

これを底の変換公式という。

$a \neq 1$ 、 $b \neq 1$ 、 $c \neq 1$ の正の数とすると、以下が成り立つ。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

◇問題

1. 次の対数の値を求めよ。

$$(1) \log_3 81 \quad (2) \log_{10} \frac{1}{1000} \quad (3) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243}$$

2. 次の式を簡単にせよ。

$$(1) (\log_2 9 + \log_4 3) \log_3 4 \quad (2) (\log_3 25 + \log_9 5)(\log_5 9 + \log_{25} 3)$$

3. $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$ で、 k が実数のとき

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

を証明せよ。

数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.4

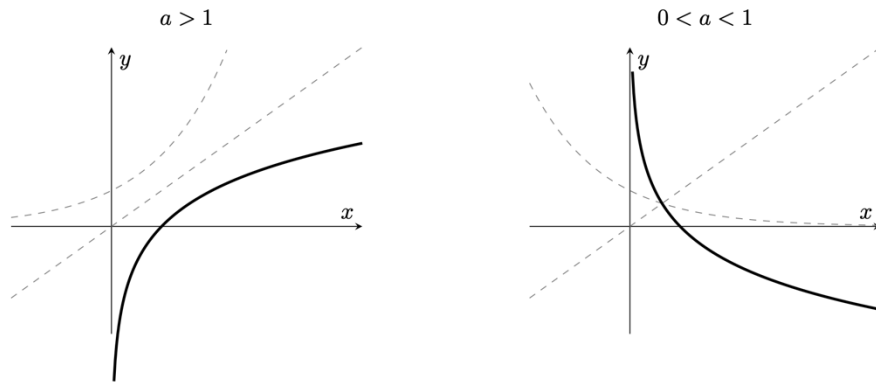
学習のねらい

対数関数のグラフの特徴と性質を理解しよう！

対数関数の方程式と不等式を解けるようになろう！

1. 対数関数とグラフ

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ とすると、 $y = \log_a x$ は a を底とする x の対数関数という。対数関数のグラフの概形は以下となる。



なお、 $y = \log_a x$ と $y = a^x$ は直線 $y = x$ に関して対称である。また、点 $(1, 0)$ を通り、 y 軸を漸近線としてもつ曲線である。

$a > 1$ のときと、 $0 < a < 1$ のときのグラフの大体の概形を覚えておくと良い。

2. 対数関数の性質

$y = \log_a x$ において、

$a > 1$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値も増加する。

$$p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$$

$0 < a < 1$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値は減少する。

$$p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$$

3. 対数関数の方程式・不等式

方程式・不等式を解く時に重要なのが、真数が必ず正であること。これを真数条件という。

例) 方程式 $\log_5 x = 2$ を解け。

方程式より、 $x = 5^2$ となるので、 $x = 25$

例) 不等式 $\log_5 x < 2$ を解け。

真数条件より、 $x > 0$ 。与えられた不等式より、 $\log_5 x < 2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$ となる。よって、 $x < 25$ 。

以上より、解は、 $0 < x < 25$

◇問題

1. 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \log_2 x = 3 \quad (2) \log_3 x > 2 \quad (3) \log_{\frac{1}{4}} x \leq -1$$

2. 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \log_2 x + \log_2(x - 7) = 3 \quad (2) 2\log_2(2 - x) \geq \log_2 x$$

数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.5

学習のねらい

常用対数について理解しよう！
桁数を求められるようになろう！

1. 常用対数

対数は、大きい数を小さい数にできるという点で便利である。例えば、1000という数字は、10を底とする対数を取ることで、 $\log_{10} 1000 = 3$ とできる。1000が3になるのだ。

このように、 $\log_{10} 2$ 、 $\log_{10} 3$ などの底を10とする対数を常用対数という。

2. 桁数を求める

さて、常用対数の使い方として、「桁数を求める」というものがある。例えば、2560という数字は4桁の数字。これは $1000 < 2560 < 10000$ なので、 $10^3 < 2560 < 10^4$ が成り立つ。

つまり、整数 N が、 $10^{n-1} < N < 10^n$ とできたら、 N の桁数が n 桁と分かるわけだ。

ここで、式を変形していくと、

$$10^{n-1} < N < 10^n$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 10^{n-1} < \log_{10} N < \log_{10} 10^n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \log_{10} 10 < \log_{10} N < n \log_{10} 10$$

$$\Leftrightarrow n-1 < \log_{10} N < n$$

とできる。つまり、 $\log_{10} N$ の値が分かれば、桁数が分かるということだ。

Step.1

$\log_{10} N$ の値を求める。

Step.2

$n-1 < \log_{10} N < n$ を満たす n を求める。
 n が桁数。

例) 3^{20} は何桁の整数か。ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$$

$$\text{よって、} 9 < \log_{10} 3^{20} < 10$$

$$\text{ゆえに、} 10^9 < 3^{20} < 10^{10}$$

したがって、 3^{20} は10桁の整数である。

これにて第5章終わり！

次は、第6章の微分積分！

高校数学のラスボス！

頑張ろう！！！！



◇問題

1. $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ として、次の値を求めよ。
(1) $\log_{10} 18$ (2) $\log_{10} 0.6$ (3) $\log_{10} 25$

2. 6^{25} の桁数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。