

数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.1

学習のねらい

指数の拡張を理解しよう！

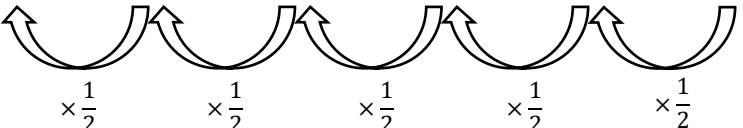
累乗根について理解しよう！

1. 指数の拡張

a^n は、 a を n 個掛け合わせたものだ。これは a の n 乗と読む。また、 $a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ をまとめて累乗といい、 a^n の a を底(てい)、 n を指数という。

さて、今まで、指数は正の数だった。しかしこれからは、負の数や有理数だって指数にできる。例えば、負の数乗について考えてみよう。

n	-2	-1	0	1	2	3
2^n	$2^{-2}=?$	$2^{-1}=?$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$



このように、表を考えると 2^n は、左に行くごとに $\frac{1}{2}$ 倍になっている。

つまり、 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ であり、 $2^{-2} = \frac{1}{4}$ になっているということだ。一般的に

$a^0 = 1$ 、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ である($a > 0$)。

2. 累乗根

では、指数が有理数だったらどうなるだろう。これを理解するために一度、累乗根というものを理解しよう。

例えば、 $2^2 = 4$ だから、 $\sqrt{4} = 2$ なわけだ。これを平方根と呼んだ。実は別名があって、2乗根ともいう。では、 $2^3 = 8$ だから、 $\dots$ っていう記号があっても良いよね。そこで、新しい記号を導入した。それが、 $\sqrt[3]{8} = 2$ という記号。これが3乗根である(立方根ともいう)。一般に、 n 乗して a になる数を a の n 乗根といい、 $\sqrt[n]{a}$ とかく。ただし $n = 2$ の場合、省略することが多い。

では、今までの指数の形で表せないかを考えよう。 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ である。よって、 $(a^?)^n = a^1$ ということだ。

今まで使ってきた指数法則は成り立たせつつ、表す方法を考えると、 $? \times n = 1$ にしたいので、 $? = \frac{1}{n}$ となる。よって、 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ということ。同

様に、 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ということだ。

よって今までの指数法則を成り立たせるように新しく定義したので、以下ようになる。

$a > 0$ 、 $b > 0$ で、 r 、 s が有理数のとき、

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

ということで、計算は◇問題で慣れていこう。

◇問題

1. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $27^{\frac{2}{3}}$ (3) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

2. 次の計算をせよ。ただし $a > 0$ とする。

(1) $a^{-2} \times a^9 \div a^5$ (2) $\left\{\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$ (3) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[6]{\frac{9}{64}}$